

دراسات بكالوريوس التجارة فى المعاملات المالية والتجارية



مركز جامعة القاهرة
للتعليم المفتوح

رياضيات التأمينات العامة

تأليف

دكتور

ممدوح حمزة أحمد

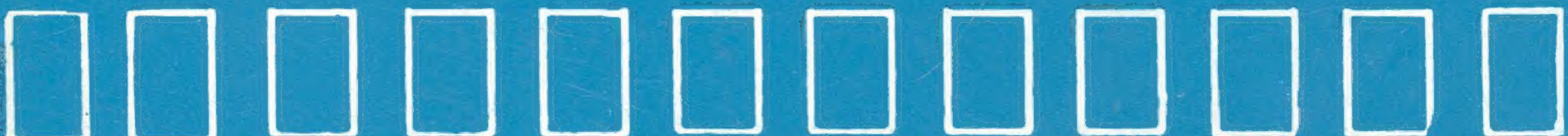
مدرس الرياضة والتأمين
كلية التجارة - جامعة القاهرة

مراجعة

دكتور

إبراهيم محمد هرجان

استاذ الرياضة والتأمين المساعد
كلية التجارة - جامعة القاهرة



رياضيات التأمينات العامة

تأليف

دكتور

ممدوح حمزة أحمد

مدرس الرياضة والتأمين

كلية التجارة - جامعة القاهرة

مراجعة

دكتور

إبراهيم محمد هرجان

استاذ الرياضة والتأمين المساعد

كلية التجارة - جامعة القاهرة

جميع حقوق الطبع محفوظة للمركز

المحتويات

رقم الوحدة	الموضوع	الصفحة
١	تحديد أسعار التأمينات العامة	١
٢	إحتمال حدوث الخسارة	٩
٣	قيمة الخسارة المتوقعة	١٩
٤	توقع الخسارة	٢٣
٥	زمن التعرض للخطر والتوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث	٥٩
٦	توزيع بواسون كتوزيع مناسب لعدد الحوادث	٧٩
٧	توزيع ذى الحدين السالب كتوزيع مناسب لعدد الحوادث	٩٥
٨	التوزيع الطبيعى	١٠٧
٩	التوزيع الطبيعى كتقريب لبعض التوزيعات المنفصلة	١٢٧
١٠	التوزيع الاحتمالى المناسب لقيمة الخسارة	١٤١
١١	توفيق توزيع احتمالى نظرى مناسب للتوزيع الاحتمالى الفعلى لعدد الحوادث واختبار جودة التوفيق .	١٦١
١٢	توفيق توزيع احتمالى نظرى مناسب للتوزيع الاحتمالى الفعلى لقيمة الخسارة واختبار جودة التوفيق	١٨٣
١٣	قياس الخطر	١٩٩
١٤	تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة وجود وحدة خطر واحدة ثم قياس الخطر	٢٢٣
١٥	تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة وجود عدة وحدات خطر ثم قياس الخطر	٢٤٩
١٦	سعر التأمين التجارى	٢٧٣
-	المراجع	٢٨٥

مقدمة :

تعتبر عملية التسعير من الأمور الهامة جداً سواء بالنسبة لشركات التأمين أو بالنسبة للمؤمن لهم نظراً لأنها الفيصل في تحديد مدى العدالة السائدة بين الطرفين من ناحية ، وإستمرار شركات التأمين في أداء دورها بالنسبة للاقتصاد القومى من ناحية أخرى .

فبالنسبة لشركات التأمين فإن تحديد السعر العادل والمناسب يتيح لها سداد إلتزاماتها قبل حملة الوثائق والاستمرار في مزاولة نشاطها .

وبالنسبة للمؤمن لهم فإن تحديد السعر العادل والمناسب يتيح لهم الحصول على التعويضات المناسبة في حالة حدوث خسارة (نظراً لأن عدم كفاية القسط يترتب عليه عدم قدرة شركات التأمين على الوفاء بالالتزاماتها قبل المؤمن لهم وبالتالي عدم حصولهم على تعويض يتناسب مع الخسارة) . وفي نفس الوقت فإن السعر العادل والمناسب يعنى سداد تكلفة تتناسب مع العائد وبمعنى آخر تعادل إلتزامات الطرفين .

ولذلك فإننا نقدم هذا الكتاب كمرجع في رياضيات التأمينات العامة لعله يفيد الباحثين والعاملين في هذا المجال والذي تفتقر المكتبة العربية إليه ، والله الموفق .

المؤلف

الوحدة الدراسية الأولى
تحديد أسعار التأمينات العامة

الوحدة الدراسية الأولى

موضوعها : تحديد أسعار التأمينات العامة

هدفها : توضيح الشروط الواجب توافرها في سعر التأمين ومعادلة حساب القسط الوحيد الصافي للتأمينات العامة .

عناصرها :

- الشروط الواجب توافرها في الأسعار
- معادلة حساب القسط الوحيد الصافي في التأمينات العامة .

مقدمة :

لا تعتمد عملية تسعير التأمين على العرض والطلب أو على التكلفة التاريخية وذلك كما فى باقى السلع والخدمات الأخرى ولكن تقوم شركة أو شركات التأمين سواء منفردة أو مجتمعة فى شكل إتحاد أو هيئة بتحديد هذه الأسعار ، وفى بعض الدول تقوم هيئات الاشراف والرقابة على شركات التأمين بتحديد هذه الاسعار بحيث تتناسب مع تكلفة تقديم خدمة التأمين .

ولأن عملية تحديد سعر التأمين تعتبر الأساس لقيام التأمين ذاته فإن شركة التأمين تقوم بتحديد هذا السعر حيث نجد فى بعض الحالات أنها قد تكون شركة جديدة تمارس التأمين لأول مرة ولذلك فإنها تقوم بالاعتماد على أسعار شركات التأمين الأخرى التى تمارس التأمين منذ فترة طويلة ثم تقوم بتعديل هذه الأسعار بما يتناسب مع ظروفها وشروطها ، وإذا كانت الشركة تقوم بتحديد سعر التأمين لنوع جديد لم يتم تحديد سعر له من قبل فإنه يقع على عاتقها وضع سعر تحكمى judgement Basis أو إعطائه سعر نوع آخر من التأمين يكون أقرب مايكون منه من حيث معدلات التكرار وقيم الخسائر وفى كلتا الحالتين فإن الشركة تواجه باحتمال حدوث انحرافات كبيرة بين الخسائر الفعلية والخسائر المتوقعة خلال السنوات الأولى ثم تقوم بتعديل أسعارها وفقاً للخبرة ومع تزايد عدد الوحدات المؤمن عليها بمرور الوقت فإن النتائج الفعلية سوف تقترب من النتائج المتوقعة وبالتالي تستقر أوضاع الشركة .

الشروط الواجب توافرها فى الاسعار :

حتى تستطيع شركة التأمين أن تمارس دورها كمنظم أو وسيط بنجاح فإنه يجب أن تتعادل الاقساط المحصلة مع الالتزامات المدفوعة (التعويضات ، العمولات ، المصاريف الادارية ، عائد رأس المال) .

ولذلك فإن هناك مجموعة من الشروط التي يجب توافرها في سعر التأمين وهو:

١- أن يكون السعر كافياً

٢- ألا يكون السعر مبالغاً فيه

٣- أن يختلف السعر باختلاف درجة الخطورة

وفيما يلي توضيح لكل شرط من هذه الشروط بشيء من الإيجاز .

١- أن يكون السعر كافياً :

يقصد بكفاية السعر أن يكون هذا السعر كافياً لتغطية جميع الالتزامات التي تقع على عاتق شركة التأمين المتمثلة في التعويضات والعمولات والمصاريف الإدارية وعائد رأس المال للمساهمين فإذا لم يكن السعر كافياً ترتب على ذلك عدم قدرة الشركة على الوفاء بالتزاماتها وبالتالي عدم قدرتها على سداد تعويض كامل للمستأمن ، وهذا يعنى أن عدم كفاية السعر تضر بكلا الطرفين : المستأمن والمؤمن وهذا يؤدي في النهاية بالتأثير سلباً على المجتمع .

٢- ألا يكون السعر مبالغاً فيه :

يعتبر هذا الشرط من الأهمية بمكان لأنه يترتب على عدم توافره نتائج خطيرة ، فإذا كان السعر مبالغاً فيه أى أكبر من اللازم فإن هذا يعنى تحقيق المؤمن لأرباح غير عادية كما أن المبالغة في السعر يترتب عليها مايلي :

٢/١ - تحول طالب التأمين إلى شركة تأمين أخرى تعطي أسعاراً أقل .

٢/٢ - تحول طالب التأمين إلى وسيلة أخرى لإدارة الخطر .

٢/٣ - انخفاض عدد الوحدات المعرضة للخطر لدى شركة التأمين مما يؤدي إلى عدم توافر أهم الشروط الفنية للتأمين حيث يتم الإخلال بقانون الأعداد الكبيرة فيصعب على شركة التأمين التنبؤ بدقة بعدد الحوادث المتوقعة ومتوسط

التعويض عن الحادث الواحد وبذلك يتحول التأمين الى مضاربة أو مقامرة تؤدي في النهاية إلى إفلاس الشركة .

٣- أن يختلف السعر باختلاف درجة الخطورة :

حتى يكون السعر عادلاً فلا بد وأن يدفع كل طالب تأمين قسطاً يتناسب مع درجة تعرضه للخطر فليس من المعقول أن يكون سعر التأمين من الحريق للمباني السكنية هو سعر التأمين من الحريق للمحلات التجارية وهو أيضاً سعر التأمين من الحريق للمصانع أو لمستودعات المواد الكيماوية أو إسطوانات الغاز ، وذلك أن كل حالة من الحالات السابقة لها درجة خطورة مختلفة (اختلاف معدل تكرار الخسارة خلال السنة واختلاف متوسط التعويض عن الحادث الواحد) وبالتالي فإن كل طالب تأمين عليه أن يدفع السعر المناسب والكافي لتغطية خطره ، وبمعنى آخر فإن السعر يجب أن يختلف من وحدة خطر لأخرى حسب درجة التعرض للخطر وبالتالي فإنه لا بد من وجود أسعار وليس سعر واحد بحيث يناسب كل سعر وحدة خطر معينة حسب درجة خطورتها . وقد يتبادر إلى الذهن أنه يمكن وضع سعر واحد متوسط لجميع الوحدات المعرضة للخطر وأن هذا السعر المتوسط يحمل في طياته خصائص المتوسط بحيث يكون هناك وحدات من المفروض أن تدفع أكثر منه ووحدات من المفروض أن تدفع أقل منه وبالتالي فإن مجموع الأقساط في النهاية سوف يكون كافياً لسداد الالتزامات التي تقع على عاتق الشركة وهذا القول غير صحيح بالمرّة لأنه إذا كان السعر المطبق هو سعر واحد متوسط أو لوحدات الخطر متوسطة درجة الخطورة فإنه سوف يترتب على ذلك هروب وحدات الخطر الجيدة الى شركات أو إلى وسائل أخرى لإدارة الخطر طالما أنها ترى أن هذا السعر أكبر من اللازم وبالتالي فإن معظم أو كل من يقبلون على التأمين هم أصحاب الوحدات عالية الخطورة (وحدات رديئة) مما يؤدي إلى إرتفاع مجموع الخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة وبالتالي تعرض الشركة للإفلاس .

أيضاً يجب أن تتم مراجعة وحدات الخطر بصفة دورية على أن يتم تعديل السعر لذات الوحدة من سنة لأخرى كلما تغيرت العوامل المساعدة للخطر أو كلما تغيرت وسائل الوقاية

والمنع .

معادلة حساب القسط الوحيد الصافي في التأمينات العامة :

يتأثر حساب القسط الوحيد الصافي في التأمينات العامة بعنصرين أساسيين هما :

١- إحتمال حدوث الحادث

٢- متوسط التعويض عن الحادث الواحد

وسوف نوضح في الوحدات التالية كيفية تحديد كل منهما .

أسئلة على الوحدة الدراسية الأولى

- ١- أذكر أهم الشروط الواجب توافرها في سعر التأمين .
- ٢- وضح كيفية تحديد سعر التأمين لنوع جديد من أنواع التأمين أو لشركة تأمين جديدة ثم وضح المشاكل المترتبة على ذلك .
- ٣- أذكر أهم العناصر المؤثرة في تحديد القسط الوحيد الصافي في التأمينات العامة .

الوحدة الدراسية الثانية
احتمال حدوث الخسارة

الوحدة الدراسية الثانية

موضوعها : إحتمال حدوث الخسارة .

هدفها : تعريف الدارس بكيفية تحديد إحتمال حدوث الخسارة .

عناصرها : - إحتمال الخسارة .

- الإحتمال الحسابي أو الرياضي أو النظري .

- الإحتمال التجريبي أو العملي أو الفعلي .

- التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث .

احتمال الخسارة : Probability of Loss

احتمال حدوث الخسارة أو إحتمال حدوث الحادث عبارة عن التكرار النسبي لعدد حالات الخسارة مقسوماً على عدد الحالات التي كانت معرضة للخسارة أو هو التكرار النسبي لعدد الحوادث منسوباً إلى عدد الوحدات التي كانت معرضة للحادث ، وبالتالي فإن إحتمال حدوث الحادث يعتبر مقياساً مادياً (كمياً) يفيد في تقدير عدد الحوادث أو الخسائر المتوقعة بالاضافة إلى أنه أحد عناصر قياس الخطر .

وتنقسم الاحتمالات من حيث طريقة حسابها إلى نوعين :

– الاحتمال الحسابي أو الرياضي أو النظري

Mathematical Probability :

وهو الاحتمال الذي يحسب وفقاً لأسس رياضية ثابتة لا تتغير قيمتها من وقت لآخر أو من شخص لآخر ، ومثال ذلك إحتمال الحصول على صورة عند القاء قطعة نقود معدنية أو إحتمال الحصول على ورقة تحمل الرقم (٥) من مجموعة أوراق اللعب ، فهو إذن إحتمال لا يتغير بتغير الزمان أو المكان .

– الاحتمال التجريبي أو العملي أو الفعلي Imperical Probability

هو الاحتمال الذي يحسب وفقاً لأسس رياضية تعتمد على بيانات وتجارب خاصة بظواهر حدثت بالفعل ولكنها تتغير من وقت لآخر لذلك فإن قيمة الاحتمال التجريبي تتغير من وقت لآخر ومن مكان لآخر ومثال ذلك إحتتمالات الحياة والوفاة ، أو إحتتمالات الحريق أو تصادم السيارات . هذا وتنقسم الاحتمالات التجريبية أو الفعلية أو العملية من حيث وقت حسابها إلى نوعين :

– الاحتمال التجريبي المتوقع : Expected Probability

وهو الاحتمال الذي يحسب من خلال بيانات خاصة بظواهر حدثت في الماضي ثم

إستخدامها فى التنبؤ بالاحتمال الخاص بالظواهر التى ستحدث فى المستقبل .

– الاحتمال التجريبي الفعلى : Actual or realized probability

وهو الاحتمال الذى يحسب فى نهاية المدة لتحديد مدى مطابقة الاحتمال الفعلى للإحتمال المتوقع بحيث يتم تعديل الاحتمال المتوقع حسب ماتسفر عنه النتائج الفعلية ، ويجب ملاحظة أنه لى تقترب الاحتمالات الفعلية من الاحتمالات المتوقعة فلا بد من توافر عدد كبير جداً من الوحدات المتماثلة المعرضة للخطر وهو ما يعرف بقانون الاعداد الكبيرة Law of Large Numbers حيث ينص هذا القانون على أن " يتلاشى الفرق بين الاحتمال الفعلى والاحتمال المتوقع كلما زاد عدد الوحدات المعرضة للخطر زيادة كبيرة جداً " .

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث :

لتقدير إحتمال الخسارة المتوقع لحدوث حادث ما وليكن حادث حريق أو تصادم سيارات أو سرقة أو وفاة الخ فإن ذلك يعتمد على بيانات عن الحادث خلال فترة ماضية (سنة أو أكثر) تسمى فترة الخبرة وذلك بشرط توافر عدد كافى من الوحدات المتماثلة المعرضة للخطر (مع مراعاة سلوك الظاهرة فى الماضى وهل تأخذ صفة الانتظام أم تتزايد معدلاتها من سنة لأخرى أم تتناقص وأخذ ذلك فى الاعتبار عند تقدير إحتمال الخسارة المتوقع) ، وإذا كان عدد الوحدات غير كافى فإنه يمكن زيادة فترة الخبرة أى تصبح سنتين أو ثلاثة أو خمس سنوات بدلاً من سنة واحدة ، كما يمكن تقسيم فترة الخبرة إلى فترات أقل من سنة وبذلك نتغلب على مشكلة نقص البيانات ، يضاف إلى ماسبق أنه يمكن الاعتماد على بيانات جهات أخرى مثل الشركات الأخرى التى تعمل فى نفس المجال ولها نفس الظروف ، شركات التأمين ، بعض الجهات المتخصصة كالمطافئ ، بالنسبة لحوادث الحريق ، وبعد تجميع البيانات وتوزيع عدد الوحدات التى كانت معرضة للخطر حسب عدد مرات إصابتها بالحادث وإحتمالاتها فإننا نحصل على التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث ، وتوجد حالتين للتوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث هما :

الحالة الأولى : حدوث حادث واحد على الأكثر خلال السنة (أو وحدة الزمن)

هناك بعض الوحدات التي تتعرض للحادث مرة واحدة على الأكثر خلال السنة (أى عدم حدوث الحادث أو حدوث حادث واحد فقط خلال السنة) أو خلال حياتها الانتاجية ومثال ذلك تعرض تحفه أثرية للكسر أو السرقة وأيضا تعرض الشخص للوفاة وفى هذه الحالة فإن الشيء أو الشخص المعرض للخطر إما أن يحدث له الحادث مرة واحدة أو لا يحدث ، وبالتالي فإذا كان لدينا ٥٠٠٠ وحدة معرضة للخطر لمدة سنة وتعرض منها ٢٠٠ وحدة للحادث خلال السنة فإنه يمكن عرض هذه البيانات فى شكل التوزيع الاحتمالى التالى :

جدول رقم (١) يوضح التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث

عدد الحوادث	عدد الوحدات	الاحتمال
٠	٤٨٠٠	٩٦ ر
١	٢٠٠	٠٤ ر
المجموع	٥٠٠٠	١,٠٠

ومن الجدول السابق يتضح لنا أن عدد الوحدات التى تعرضت لصفر حادث (لم تتعرض للحادث) هو ٤٨٠٠ وحدة من بين ٥٠٠٠ وحدة كانت معرضة للحادث وبالتالي فإن

$$\text{إحتمال عدم حدوث الحادث يساوى } \frac{٤٨٠٠}{٥٠٠٠} = ٩٦ \text{ ر}$$

وأيضا فإن عدد الوحدات التى تعرضت لحادث واحد خلال السنة هو ٢٠٠ وحدة من

$$\text{بين ٥٠٠٠ وبالتالى فإن إحتمال حدوث الحادث لأى وحدة يساوى } \frac{٢٠٠}{٥٠٠٠} = ٠٤ \text{ ر}$$

الحالة الثانية : عدم حدوث الحادث أو حدوث حادث على الأقل خلال السنة (أو وحدة الزمن)

هناك بعض الوحدات التي قد لا تتعرض للحادث خلال السنة أو تتعرض لحادث واحد على الأقل خلال السنة ومثال ذلك تعرض المصنع أو الفندق لحادث حريق أو سطو وأيضاً تعرض السيارة لحادث تصادم ففي الحالات السابقة نجد أنه قد لا يحدث الحادث خلال السنة أو قد يحدث الحادث مرة واحدة أو مرتين أو ثلاثة أو أكثر خلال السنة . فإذا كان لدينا ٥٠٠٠ وحدة معرضة للخطر لمدة سنة وبدراسة هذه الوحدات حسب عدد مرات تعرضها للحادث حصلنا على التوزيع الاحتمالي التالي :

جدول رقم (٢) يوضح التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث

عدد الحوادث	عدد الوحدات	الاحتمال
٠	٣٢٠٠	٠.٦٤
١	١٢٠٠	٠.٢٤
٢	٤٠٠	٠.٠٨
٣	١٥٠	٠.٠٣
٤	٥٠	٠.٠١
المجموع	٥٠٠٠	١.٠٠

ومن الجدول السابق يتضح لنا أن عدد الوحدات التي لم تتعرض لأي حادث هو ٣٢٠٠ وحدة من بين ٥٠٠٠ وحدة معرضة للخطر وبالتالي فإن احتمال عدم حدوث أى حادث لأي وحدة هو $\frac{٣٢٠٠}{٥٠٠٠} = ٠.٦٤$. وأيضاً يمكن حساب احتمال حدوث حادث واحد أو حادثين أو ثلاثة أو أربعة كما يلي :

$$\text{إحتمال حدوث حادث واحد} = \frac{1200}{5000} = 0.24 \text{ ر.}$$

$$\text{إحتمال حدوث حادثين} = \frac{400}{5000} = 0.08 \text{ ر.}$$

$$\text{إحتمال حدوث ٣ حوادث} = \frac{150}{5000} = 0.03 \text{ ر.}$$

$$\text{إحتمال حدوث ٤ حوادث} = \frac{50}{5000} = 0.01 \text{ ر.}$$

وأيضاً يمكن حساب إحتمال حدوث حادث واحد على الأقل أو حادثين على الأقل أو ٣ حوادث على الأقل أو ٤ حوادث على الأقل كما يلي :

إحتمال حدوث حادث واحد على الأقل = إحتمال حدوث حادث واحد أو حادثين أو ٣ أو ٤

$$0.36 = \frac{1800}{5000} = \frac{50 + 150 + 400 + 1200}{5000} =$$

إحتمال حدوث حادثين على الأقل = إحتمال حدوث حادثين أو ٣ أو ٤

$$0.12 = \frac{600}{5000} = \frac{50 + 150 + 400}{5000} =$$

إحتمال حدوث ٣ حوادث على الأقل = إحتمال حدوث ٣ حوادث أو ٤

$$0.04 = \frac{200}{5000} = \frac{50 + 150}{5000} =$$

إحتمال حدوث ٤ حوادث على الأقل = إحتمال حدوث ٤ حوادث فقط

$$0.01 = \frac{50}{5000} =$$

كما يمكن حساب احتمالات تحقيق حادث على الأكثر أو حادثين على الأكثر أو ٣

حوادث على الأكثر أو ٤ حوادث على الأكثر كما يلي :

إحتمال حدوث حادث على الاكثر = إحتمال حدوث حادث واحد أو عدم حدوث
أى حادث

$$r_{88} = \frac{4400}{5000} = \frac{3200 + 1200}{5000} =$$

إحتمال حدث حادثين على الاكثر = احتمال حدوث حادثين أو حادث أو عدم حدوث
أى حادث

$$r_{96} = \frac{4800}{5000} = \frac{3200 + 1200 + 400}{5000} =$$

إحتمال حدوث ٣ حوادث على الاكثر = إحتمال حدوث ٣ حوادث أو حادثين أو حادث
أو عدم حدوث أى حادث

$$r_{99} = \frac{4950}{5000} = \frac{3200 + 1200 + 400 + 150}{5000} =$$

إحتمال حدوث ٤ حوادث على الاكثر = إحتمال حدوث ٤ حوادث أو ٣ حوادث أو
حادثين أو حادث أو عدم حدوث أى حوادث

∴ إحتمال حدوث ٤ حوادث على الاكثر

$$1 = \frac{5000}{5000} = \frac{3200 + 1200 + 400 + 150 + 50}{5000} =$$

ملحوظة :

يتم الحصول على البيانات الخاصة بالتوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث أو لقيم الخسائر
من خلال طريقتين :

الطريقة الأولى التوزيعات الاحتمالية الفعلية :

من خلال دراسة الظاهرة خلال الفترة الماضية (فترة الخبرة) وذلك بشرط توافر
عدد كافى من الوحدات المتماثلة ثم تسجيلها سواء حسب عدد الحوادث التى تعرضت لها كل
وحدة خلال فترة الخبرة أو حسب قيمة الخسارة ، والتوزيع الاحتمالى باستخدام هذه الطريقة
يعتمد على البيانات التاريخية .

الطريقة الثانية : التوزيعات الاحتمالية النظرية :

قد لا يمكن الاعتماد على البيانات المتوافرة عن الظاهرة خلال الفترة الماضية أما لعدم الثقة فيها وإما لعدم كفايتها ، وإما لأن البيانات المتاحة عن الظاهرة توضح عدد معين للحوادث (كما في جدول رقم ٢) وهذا العدد حده الأقصى ٤ حوادث على الرغم من أنه لا يوجد ما يمنع من حدوث ٥ أو ٦ حوادث لأي وحدة في العام القادم ، لذلك يفضل استخدام التوزيع النظري المناسب والذي يمثل منحنى ممهداً يعطى قيماً للاحتمالات المختلفة لحدوث عدد من الحوادث من صفر إلى ما لانهاية مع مراعاة استخدام التوزيع المناسب لبيانات الظاهرة من خلال الامام بخصائص التوزيعات النظرية ، فإذا كان متوسط التوزيع يساوى تباينه فإننا نستخدم توزيع بواسون ، وإذا كان المتوسط يزيد عن التباين فإننا نستخدم توزيع ذى الحدين وإذا كان التباين يزيد عن المتوسط فإننا نستخدم توزيع ذى الحدين السالب مع إجراء اختبار جودة التوفيق للتأكد من مطابقة التكرارات أو الاحتمالات الخاصة بالتوزيع النظري مع نظيرتها الخاصة بالتوزيع الفعلى .

أسئلة على الوحدة الدراسية الثانية

١- عرف احتمال الخسارة وماهى الانواع المختلفة للاحتمالات من حيث :

طريقة حسابها ، وقت حسابها .

٢- إذا أُتيحت لديك البيانات التالية والخاصة بخبرة فرع السيارات بشركة الشرق للتأمين :

عدد الحوادث	صفر	١	٢	٣
عدد السيارات	١٥٠٠٠	٤٠٠٠	٨٠٠	٢٠٠

فإذا كان هناك شخص لديه سيارة واحدة إحسب الاحتمالات الآتية بناء على خبرة شركة الشرق للتأمين :

- أ- أن تتعرض السيارة لحادث واحد فقط خلال العام القادم .
- ب- أن تتعرض السيارة لحادث واحد على الاقل خلال العام القادم .
- ج- أن تتعرض السيارة لحادث واحد على الاكثر خلال العام القادم .
- د- ألا تتعرض السيارة لاي حادث خلال العام القادم .

الوحدة الدراسية الثالثة
قيمة الخسارة المتوقعة

الوحدة الدراسية الثالثة

موضوعها : قيمة الخسارة المتوقعة

هدفها : تعريف الطالب بكيفية تحديد قيمة الخسارة المتوقعة وهو ما يعرف بمتوسط التعويض عن الحادث الواحد .

عناصرها :

- حجم الخسارة المتوقعة أو وطأة الخسارة

- حالة ثبات قيمة الخسارة

- حالة تغير قيمة الخسارة

- الأهمية النسبية للخسائر المتوقعة

حجم الخسارة المتوقعة : Expected loss or loss severity

يقصد بحجم الخسارة المتوقعة قيمة الخسارة في حالة حدوثها ، وحيث أن قيمة الخسارة قابلة للقياس الكمي فإنها تفيد كثيراً في تحديد مقياس عام لدرجة الخطورة ، فكما أن احتمال حدوث الخسارة يعتبر مقياس لدرجة الخطورة فإن حجم الخسارة يعتبر أيضاً مقياس لها بل إنه يفوق احتمال الخسارة في قياس درجة الخطورة وذلك لأننا نجد أن حجم الخسارة المتوقعة يعطى تكلفة تحقق الحادث بل إن احتمال حدوث الحادث لا تظهر أهميته إلا من خلال إقترانه بحجم الخسارة المتوقعة في حالة حدوثها ، ولتوضيح ذلك نفرض أن شخصاً يريد شراء مصنع ما وأن هذا المصنع معرض لخطر الحريق فإذا قدر له الخبراء أن احتمال حدوث الحادث هو ١٪ فهل يمكن الحكم من خلال الاحتمال الحكم على درجة الخطورة بأنها منخفضة وبالتالي فإن قيمة الخطر منخفضة ، وإذا كانت قيمة الخسارة في حالة تحقق الحادث ٢٠٠٠٠٠ جنيه وأن قيمة المصنع ٢٥٠٠٠٠ جنيه فهل يظل القرار كما هو بأن درجة الخطورة منخفضة ، بالتأكيد سوف يتغير رأي متخذ القرار لأن الاحتمال وإن كان صغيراً إلا أن قيمة الخسارة المترتبة على تحقق الحادث هي قيمة كبيرة جداً (تمثل ٨٠٪ من قيمة المصنع) ، وعلى النقيض فإنه في حالة ما إذا كان احتمال حدوث الحادث ٤٠٪ فإذا أخذنا الاحتمال كمقياس لدرجة الخطورة فبال تأكيد سوف تكون قيمتها مرتفعة أما إذا علمنا أن قيمة الخسارة في حالة حدوث الحادث هي ١٠٠٠ جنيه فإن القرار سوف يتغير تماماً وتنخفض درجة الخطورة وذلك لأن الاحتمال وإن كانت قيمته مرتفعة فإن قيمة الخسارة منخفضة (تمثل ٠٤٪ أي ٠٠٤ ر من قيمة المصنع) .

نخلص من ذلك أن قيمة الخسارة لها أهمية خاصة في تحديد درجة الخطورة (وبالتالي قياس الخطر كما سنرى فيما بعد) جنباً إلى جنب مع احتمال حدوث الحادث ويجب مراعاة أن حجم الخسارة المتوقعة تتراوح قيمتها بين مبلغ صغير جداً وبين مبلغ كبير جداً قد يصل إلى قيمة الشيء أو الدخل بالكامل ، فبالنسبة للمثال السابق الخاص بالمصنع والذي تبلغ قيمته ٢٥٠٠٠٠ جنيه فإنه قد لا يحدث الحادث ، وتكون الخسارة صفر وقد يحدث الحادث وفي هذه الحالة فإن قيمة الخسارة تتدرج بقيم مختلفة قد تبدأ من ١٠٠ جنيه ثم ٢٠٠ ثم ١٠٠٠ ثم ٢٠٠٠ ثم ٥٠٠٠ أو قد يكون ١٠٠٠٠٠ أو قد تصل إلى

٢٠٠٠٠٠ جنيه مع مراعاة أن بعض الأشياء لا يترتب على الحادث ضياع قيمتها بالكامل حيث تكون هناك أشياء غير قابلة للاحتراق مثل الأرض والمباني (في بعض الحالات لا تتأثر أساسات المبنى أو الحوائط وتكون الخسائر عبارة عن الابواب والشبابيك والدهانات) وهنا يجب التفرقة بين قيمة الشيء والقيمة المعرضة للخطر .

ففي المثال السابق نجد أن قيمة الشيء (قيمة المصنع بالكامل) هي ٢٥٠٠٠٠٠ جنيه ولكن في حالة حدوث حريق كامل فإنه لن يتم ضياع قيمة المصنع بالكامل حيث سيتبقى ثمن الأرض والمباني وهذا يعنى أن القيمة المعرضة للخطر (قيمة الشيء بعد استبعاد الأشياء غير القابلة للاحتراق) قد تقل عن قيمة الشيء وهى فى هذا المثال ثم تقديرها بمبلغ ٢٠٠٠٠٠٠ جنيه .

ولكن المبلغ المعرض للخطر يتساوى فى حالات كثيرة مع قيمة الشيء ومثال ذلك تعرض سيارة لحادث أو انفجار يؤدي إلى خسارة كلية أو وفاة الشخص سواء بحادث أو وفاة طبيعية حيث نجد فى هذه الحالات أن المبلغ المعرض للخطر يساوى قيمة الشيء أو الأصل .

يضاف إلى ما سبق أن هناك بعض الأشياء التى يترتب على تعرضها لحادث إلى فقد قيمتها بالكامل (أى لا تكون هناك خسائر جزئية بل هى خسائر كلية دائماً) ومثال ذلك تعرض تحفة أثرية للكسر أو تعرض الشخص لحادث يؤدي إلى وفاته .

وبناء على ذلك فإنه عند دراسة التوزيع الاحتمالى لحجم الخسائر (أى توزيع الخسائر خلال الفترة السابقة حسب قيمتها ومعدلات تكرارها وبالتالي احتمالات تحقق كل خسارة) فإننا نجد أنفسنا أمام حالتين محددتين :

الحالة الأولى : ثبات قيمة الخسارة :

فى هذه الحالة نجد أنه إما ألا يحدث الحادث وهنا تكون قيمة الخسائر صفر وإما أن يحدث الحادث وهنا تكون الخسارة كلية أى تساوى قيمة الشيء بالكامل ومثال ذلك تعرض تحفة أثرية للكسر أو السرقة أو تعرض واجهة المحل أو الشركة المصنوعة من قطعة واحدة من الزجاج للكسر أو وفاة الشخص ، ففي جميع الحالات السابقة نجد أن الخسارة تحدث بقيمة

واحدة وبالتالي لا يكون هناك توزيعاً إحصائياً لقيمة الخسارة ، ولتوضيح ذلك نفرض أن هناك ٥٠٠٠ وحدة متماثلة معرضة لخطر السرقة وقيمة كل منها ١٠٠٠٠ جنيه وأنه قد حدث ٢٠٠ حادث سرقة خلال السنة هنا نجد أن جميع حالات الخسارة ستكون قيمة كل منها ١٠٠٠٠ جنيه ، وأيضاً إذا كان لدينا ٥٠٠٠ شخص لهم نفس العمر وليكن تمام السن ٤٠ ويعملون في شركة واحدة تعطى ١٠٠٠٠ جنيه لأسرة كل متوفى وأنه قد توفى منهم خلال السنة ٢٠٠ شخص فإن المبالغ المسددة ستكون متساوية ، هنا نجد أنه بالنسبة للأشخاص أو الوحدات التي تعرضت للحادث وعددها ٢٠٠ وحدة سوف يكون التوزيع الاحتمالي لها حسب القيمة كما يلي :

جدول رقم (١) يوضح التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة	عدد الوحدات	الإحتمال
١٠٠٠٠	٢٠٠	١,٠٠
المجموع	٢٠٠	١,٠٠

الحالة الثانية : تغير قيمة الخسارة :

في هذه الحالة نجد أنه إما ألا يحدث الحادث وهنا تكون قيمة الخسارة صفر أو أن يحدث الحادث ويترتب عليه خسارة تأخذ أي قيمة بداية من مبلغ صغير جداً وحتى قيمة الشيء بالكامل (أو أقصى قيمة معرضة للخطر) ، ومثال ذلك حوادث السيارات أو الحريق أو السرقة الخ حيث نجد أنه حتى في ظل تماثل قيم الأشياء المعرضة للخطر وبالرغم من تعرضها لنفس الحادث إلا أن قيمة الخسارة الناتجة تختلف من وحدة لأخرى ، وأبسط مثال لذلك أنه قد يحدث تصادم بين سيارتين (أي نفس ظروف الحادث) ومع هذا فإن قيمة الخسارة تختلف بالنسبة لكل سيارة بل قد تتباين قيم الخسارة بحيث نجد أن خسارة السيارة الأولى ١٠٠ جنيه مثلاً والثانية ١٠٠٠٠ جنيه .

وعلى الرغم من تساوى قيم الاشياء المعرضة للخطر فى حالات كثيرة إلا أنه قيم الخسائر تختلف من وحدة لأخرى ويرجع ذلك إلى عدة عوامل منها :

١- **إختلاف طبيعة مسبب الخطر** : فالخسارة الناتجة عن الحريق تختلف قيمتها بحسب ما إذا كان الحريق قد نتج عن الاشتعال الظاهر أم عن بركان ام عن إنفجار أم عن صاعقة .

٢- **إختلاف طبيعة المبنى** : فالخسارة الناتجة عن الحريق تختلف قيمتها بحسب ما إذا كان المبنى من الطوب الحرارى أو العادى أو من المواد الأخرى القابلة للاشتعال

٣- **إختلاف طبيعة الاستعمال** : فالخسارة الناتجة عن حريق فى مبنى يستخدم فى السكنى العادية تختلف بحسب عدد السكان ، كما أن الخسارة الناتجة عن حريق فى مبنى يستخدم فى تخزين المواد تختلف بحسب طبيعة هذه المواد وهل هى قابلة للاشتعال بدرجة شديدة مثل المواد الكيماوية وإسطوانات الغاز أم هى مواد عادية .

٤- **إختلاف طبيعة المكان** : فالخسارة الناتجة عن حريق فى مبنى يجاور محطه بنزين أو مخزن لاسطوانات الغاز تختلف عن الخسارة الناتجة عن حريق فى مبنى يجاور مبانى سكنية أو هناك فواصل ومسافات بين المبانى .

٥- **مدى توافر وسائل الوقاية والمنع** : حيث تختلف قيمة الخسارة بحسب مدى توافر وسائل الوقاية والمنع الخاصة بالمبنى من عدمه أو بحسب مدى توافر وسائل الوقاية والمنع العامة (جهاز الاطفاء) ومدى قربها من المكان .

وفى حالة إختلاف قيم الخسارة من حادث إلى حادث فإنه يمكن توزيع عدد الحوادث التى تحققت حسب قيمتها (وذلك من خلال إعطاء قيمة محددة لكل خسارة أو من خلال إعطاء فئات أو مدى للخسارة) .

على سبيل المثال إذا كان لدينا ٥٠٠٠ سيارة متماثلة فى القيمة معرضة لحادث تصادم وأنه قد حدث خلال العام ١٢٠٠ حادث تصادم وبدراسة قيمة الخسائر الناتجة عن هذه الحوادث تبين أن هناك ٦٠٠ خسارة تزيد قيمتها عن الصفر وتقل عن ١٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ٢٠٠ خسارة تأخذ قيمة من ١٠٠٠ جنيه وحتى أقل من ٢٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ١٥٠ خسارة تأخذ قيمة من ٢٠٠٠ جنيه وحتى أقل من ٣٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ٩٠ خسارة تأخذ

قيمة من ٣٠٠٠ جنيه وحتى أقل من ٤٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ٣٠ خسارة تأخذ قيمة من ٤٠٠٠ جنيه وحتى أقل من ٥٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ١٨ خسارة تأخذ قيمة من ٥٠٠٠ جنيه وحتى أقل من ٦٠٠٠ جنيه ، وأن هناك ١٢ خسارة تأخذ قيمة من ٦٠٠٠ جنيه وحتى أقل من ٧٠٠٠ جنيه .

وبناء على البيانات السابقة فإنه يمكن إعداد جدول التوزيع الاحتمالي لقيم الخسائر كما يلي :

جدول رقم (٢) التوزيع الاحتمالي لقيم الخسائر

قيمة الخسارة	عدد الوحدات	الإحتمال
صفر -	٦٠٠	٥٠ ر
١٠٠٠ -	٢٠٠	٢٥ ر
٢٠٠٠ -	١٥٠	١٢٥ ر
٣٠٠٠ -	٩٠	٧٥ ر
٤٠٠٠ -	٣٠	٢٥ ر
٥٠٠٠ -	١٨	١٥ ر
٦٠٠٠ - ٧٠٠٠	١٢	١ ر
المجموع	١٢٠٠	١,٠٠

وعند حساب متوسط قيمة الخسارة الناتجة عن الحادث الواحد فإنه لابد من إيجاد مركز الفئة لكل خسارة حيث :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{٢}$$

$$\text{أو} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة}}{٢} + \frac{١}{٢} \text{ طول الفئة}$$

فالفئة الأولى هي : (صفر - ١٠٠٠) حدها الأدنى صفر وحدها الأعلى ١٠٠٠

$$\text{وبالتالي فإن مركز الفئة} = \frac{\text{صفر} + ١٠٠٠}{٢} = ٥٠٠$$

$$\text{أو} = \text{صفر} + ١٠٠٠ \times \frac{١}{٢} = ٥٠٠$$

وهذا يعنى أننا نفترض أن الخسائر الواقعة داخل كل فئة موزعة توزيعاً منتظماً على

طول الفئة وبالتالي يمكن اعتبار أن جميع الخسائر الواقعة داخل كل فئة قيمتها تمثل مركز

الفئة ، والفئة الثانية هي : (١٠٠٠ - ٢٠٠٠) حدها الأدنى ١٠٠٠ وحدها الأعلى ٢٠٠٠

$$\text{وبالتالي فإن مركز الفئة} = \frac{١٠٠٠ + ٢٠٠٠}{٢} = ١٥٠٠$$

وهكذا بالنسبة لباقي الفئات ، ويضرب مركز كل فئة في الاحتمال المناظر ثم جميع

النواتج فإننا نحصل على متوسط قيمة الخسارة الواحدة ، أى أن :

متوسط قيمة الخسارة = مجموع حاصل ضرب كل مركز فئة في الاحتمال المناظر له

$$\text{أى أن } \bar{س} = \text{مـح} (س \times ح (س))$$

حيث $\bar{س}$ متوسط قيمة الخسارة ، $س$ مركز الفئة ، $ح (س)$ الإحتمال المناظر لكل فئة.

وبتطبيق ذلك على بيانات جدول رقم (٤) فإننا نحصل على متوسط قيمة الخسارة كما

يلى :

جدول رقم (٣) حساب متوسط قيمة الخسارة

مركز فئة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	مركز الفئة × الاحتمال س × ح (س)
٥٠٠	٥٠ر	٢٥٠
١٥٠٠	٢٥ر	٣٧٥
٢٥٠٠	١٢٥ر	٣١٢,٥
٢٥٠٠	٧٥ر	٢٦٢,٥
٤٥٠٠	٢٥ر	١١٢,٥
٥٥٠٠	١٥ر	٨٢,٥
٦٥٠٠	١ر	٦٥
المجموع	١,٠٠	١٤٦٠ مـ (س × ح (س))

ومن الجدول السابق يتضح أن متوسط الخسارة الواحدة ١٤٦٠ جنيه (مع مراعاة أنها تحمل خصائص المتوسط أى أن هناك قيم أصغر منها وأخرى أكبر منها) .

الأهمية النسبية للخسائر المتوقعة :

يتضح لنا من العرض السابق أنه يمكن قياس الخطر من خلال عنصرين :

١- معدل تكرار الخسارة (متوسط عدد الخسائر التى يمكن حدوثها) Loss frequency

٢- وطأة الخسارة (متوسط قيم الخسائر فى حالة حدوثها) Loss Severity

وحتى يمكن تحديد الأهمية النسبية للخسائر المتوقعة التى يمكن أن يتعرض لها الأفراد أو ممتلكاتهم فإنه لابد من الاعتماد على كلا من معدل تكرار الخسارة ومتوسط قيم الخسائر فى حالة حدوثها وخلافاً لما يعتقد البعض فإن متخذ القرار يهتم بقيمة الخسارة

أكثر من إهتمامه بمعدل تكرارها ، فعلى سبيل المثال نجد أن الخسائر ذات القيم الكبيرة وخاصة مايمكن أن نطلق عليه الكارثة تكون إحتتمالاتها صغيرة جداً ومع هذا فإنها تكون خطيرة جداً فى حالة تحققها من الخسائر ذات القيم البسيطة والتي تكون متكررة أى إحتتمالاتها كبيرة وبالتالي فإنه يجب الاهتمام بالخسائر ذات القيم الكبيرة ، وكمثال على ذلك نجد أن حادث تصادم السيارة وتعرضها لخسارة جزئية أو كلية يكون إحتتماله اكبر من إحتمال حدوث حادث يترتب عليه مسئولية مدنية ومع هذا فإن قيمة الخسارة الناتجة عن حادث يؤدي إلى مسئولية مدنية تكون اكبر بكثير من قيمة الخسارة الناتجة عن تصادم السيارة وتعرضها للخسارة وهذا يفرض على متخذ القرار أن يولى خسائر المسئولية المدنية اهمية اكبر عندما يقرر إدارة الاخطار التي يتعرض لها .

يضاف إلى ما سبق أنه حتى بالنسبة لنوع الخسارة الواحدة فإنه يجب تقسيمه إلى مستويات أو فئات فبالنسبة للخسائر المادية الناتجة عن تصادم السيارة فإنه يجب تقسيمها إلى فئات ولتكن : خسائر فى حدود ٥٠٠٠ جنيه ، خسائر تزيد عن ٥٠٠٠ جنيه وسوف نجد أن إحتمال أن تكون الخسارة اكبر من ٥٠٠٠ أقل بكثير من إحتمال أن تكون قيمة الخسارة فى حدود ٥٠٠٠ جنيه إلا أنه لابد من إعطاء الخسارة الاكبر إهتماماً اكبر بالرغم من إنخفاض إحتمال تحققها .

العوامل التي يجب مراعاتها عند تقدير قيم الخسائر المتوقعة

١- يجب على مدير الخطر عند تقدير قيم الخسائر المتوقعة أن يأخذ فى اعتباره جميع أنواع الخسائر التي يمكن حدوثها نتيجة تحقق حادث معين بالإضافة الى تحديد تأثيرها من الناحية المالية على المنشأة . وعادة فإن الانواع المختلفة للخسائر الاكثر أهمية يكون من الصعب على مدير الخطر تحديدها بعكس الأنواع الأخرى الأقل أهمية والتي يكون من السهل عليه تحديدها ، وكمثال على ذلك فإن الخسائر المباشرة التي يمكن أن تتعرض لها الممتلكات يسهل تقديرها بدقة مقدماً وذلك بعكس الخسائر غير المباشرة (مثل خسائر التوقف عن العمل خلال فترة الإصلاح أو الاستبدال) والتي تنتج عن نفس الحادث حيث لاتؤخذ فى الاعتبار فى معظم الاحيان حتى تحدث، هذا بالإضافة إلى الخسائر الاخرى التي تنتج عن نفس الحادث مثل : خسائر المسئولية المدنية ، خسائر الاشخاص .

٢- كما يجب على مدير الخطر أن يأخذ في إعتباره عند تحديد قيم الخسائر المتوقعة أن الحادث الواحد قد يؤدي إلى خسارة لاكثر من مبنى أو لاكثر من شخص أو لاكثر من وحدة وذلك حسب طبيعة الشيء المعرض للخطر .

٣- وأيضاً يجب أن يؤخذ في الاعتبار أن المحصلة النهائية للخسائر الناتجة عن الحادث الواحد قد تزيد عن قيمة الشيء بل قد تزيد عن مجموع الخسائر التي ذكرناها سابقاً . فالخسائر الصغيرة نسبياً إذا قررت المنشأة أن تتحملها في حالة حدوثها غالباً ماتواجهها من خلال إيراداتها أو من خلال الأصول التي يسهل تحويلها إلى نقدية أما الخسائر الكبيرة فإنه يترتب عليها مشاكل خاصة بصعوبة تدبير السيولة من ناحية أو ارتفاع تكلفة إقراضها من ناحية أخرى لمواجهة مثل هذه الخسائر .

٤- ويضاف إلى مشكلتي صعوبة تدبير السيولة وإرتفاع تكلفتها فإن الخسائر الكبيرة قد يترتب عليها تأثيرات معاكسة خطيرة بالنسبة للتخطيط المالى للمنشأة مما يؤدي إلى مشاكل مالية كبيرة والتي يمكن للمنشأة أن تخفف من وطأتها أو أن تتحاشاها إذا أخذتها في الاعتبار من البداية وتم تدبير الاسلوب الأمثل لمواجهةها .

٥- كما أن هناك بعض الخسائر قد تؤدي إلى دمار المنشأة Ruin of the Business ولتوضيح ذلك نفرض أن لدينا مصنعاً تعرض لحادث حريق أدى إلى إحتراق عنبر الانتاج بمحتوياته وقدرت الخسائر بمبلغ ٦٥٠٠٠٠ جنية ، كما أدى الحادث إلى توقف العمل بالمصنع لمدة ستة أشهر وترتب على ذلك خسارة قدرها ٦٠٠٠٠٠ جنية ونتيجة لعدم قدرة المصنع على تحمل هذه الخسائر التي بلغت ١٢٥٠٠٠٠ جنية فقد تم اغلاق المصنع وبيعت أصوله بمبلغ ٣٠٠٠٠٠٠ جنية في حين أن ثمن هذه الأصول أثناء مزاولة المصنع لانشاطه تبلغ ٤٨٠٠٠٠٠ جنية مما يعنى خسارة أخرى قدرها ١٨٠٠٠٠٠ جنية .

٦- وأيضاً فإنه يجب عند تقدير قيمة الخسارة مراعاة تاريخ حدوث الحادث وتاريخ إستحقاق الخسارة ، فعلى سبيل المثال فإن حدوث خسارة سنوية قيمتها ٢٠٠٠٠ جنية ولمدة ٢٠ سنة لاتساوى في وطأتها خسارة واحدة حالاً قيمتها ٤٠٠٠٠٠٠ جنية وذلك لسببين : السبب الاول إختلاف قيمة النقود باختلاف تواريخ إستحقاقها (أى تأثير عنصر الزمن

على قيمة النقود) وذلك لأن خسارة سنوية قيمتها ٢٠٠٠٠ جنيه لمدة ٢٠ سنة تعنى خسائر قدرها ٤٠٠٠٠٠ جنيه ولكن بأخذ عنصر الزمن فى الاعتبار وخصم هذه الخسائر بمعدل فائدة معين يؤدي إلى إنخفاض قيمتها كثيراً (فإذا خصمنا المبالغ السابقة بمعدل ١٠ ٪ فإن قيمتها الحالية تساوى ١٧٠٢٧١ جنيه) . والسبب الثانى هو قدرة المنشأة على سداد مبلغ ٤٠٠٠٠٠ جنيه خلال ٢٠ سنة بعكس الحال عندما يستحق هذا المبلغ مرة واحدة فى سنة ما . وأيضاً فإن حدوث حادث حريق يترتب عليه خسارة نتيجة إحتراق المبنى ومحتوياته بما قيمته ١٠٠٠٠٠٠ جنيه يحتاج إلى إصلاح فوري يكون أكثر وطأة من حدوث حادث يترتب عليه مسئولية مدنية بما قيمته ١٠٠٠٠٠٠ جنيه أيضاً ولكن لن يتم سدادها قبل مرور ٤ سنوات على الأقل حتى صدور حكم من المحكمة بالمسئولية .

٧- كما يجب تعديل قيم الخسائر بعد تقديرها بحيث تعكس إرتفاع أسعار تكاليف الإصلاح أو الاستبدال أو زيادة عدد الخسائر المتوقع أو زيادة قيمة المزايا الممنوحة للعمال عند تعرضهم لحادث ولتوضيح ذلك إذا كانت قيمة الخسائر المتوقعة قد تم تقديرها على أساس خبرة ٥ سنوات سابقة بمبلغ ١٠٠٠٠ جنيه وأن أسعار الإصلاح أو الاستبدال قد زادت بمعدل ٥٠ ٪ كما يتوقع زيادتها بمعدل ١٠ ٪ فى العام القادم وبالتالي فإن قيمة الخسائر المتوقعة فى العام القادم تصبح :

$$= ١٠٠٠٠ \times \frac{١٥٠}{١٠٠} \times \frac{١١٠}{١٠٠} = ١٦٥٠٠ \text{ جنيه}$$

٨- وأخيراً فإنه يجب أن يؤخذ فى الاعتبار تأثير التغيرات فى نوعية مواد البناء وفى مسببات الخطر الخاصة بالبيئة وأيضاً فى برامج الأمان على تقدير قيمة الخسارة المتوقعة فى المستقبل .

أقصى خسارة ممكنة وأقصى خسارة محتملة أو متوقعة :

The maximum Possible loss and the maximum Probable loss

أقصى خسارة ممكنة هي أقصى خسارة يمكن حدوثها في ظل أسوأ الظروف، وأقصى خسارة محتملة هي أقصى خسارة يمكن حدوثها باحتمال معين ، وعليه يمكن القول بأن أقصى خسارة محتملة تقل عن أقصى خسارة ممكنة . ولتوضيح ذلك نفرض أن لدينا شقة تقدر محتوياتها بمبلغ ٥٠٠٠٠ جنيه ومعرضة لخطر السرقة مع مراعاة أن هناك بعض المحتويات التي يصعب سرقتها (إما لثقل وزنها أو لأنها مثبتة في الحوائط الخ) والتي يقدر ثمنها بمبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه وهذا يعني أن ما يمكن سرقة قد تصل قيمته إلى ٣٠٠٠٠ جنيه ، كما أوضحت البيانات السابقة الخاصة بالتوزيع الاحتمالي لقيم الخسائر للشقق المماثلة لهذه الشقة أن أكبر حادث سرقة بلغت قيمته ٢٥٠٠٠ جنيه ، فبناء على البيانات السابقة يمكن القول بأن :

قيمة الشيء ٥٠٠٠٠ جنيه .

أقصى خسارة ممكنة = المبلغ المعرض للخطر = ٣٠٠٠٠ جنيه

أقصى خسارة محتملة = ٢٥٠٠٠ جنيه .

أسئلة على الوحدة الدراسية الثالثة

- ١- قارن بين : قيمة الشيء المعرض للخطر والمبلغ المعرض للخطر وهل هما مختلفان دائماً .
- ٢- وضح أهمية تحديد حجم الخسارة المتوقعة .
- ٣- ماهى العوامل التى تؤدي إلى إختلاف قيمة الخسارة على الرغم من تساوى قيم الاشياء المعرضة لنفس الخطر .
- ٤- فيما يلى بيان عن خبرة فرع السيارات بشركة الشرق للتأمين :

فئة الخسارة	صفر-	-٢٠٠٠	-٤٠٠٠	-٦٠٠٠	-٨٠٠٠	١٠٠٠٠-١٢٠٠٠
عدد الوحدات	٥٢٠	٢١٠	١٣٠	٧٠	٤٥	٢٥

فإذا كان هناك شخص لديه سيارة واحدة إحسب الاحتمالات الآتية بناء على خبرة شركة الشرق للتأمين :

- أ- أن تتعرض السيارة لحادث يترتب عليه خسارة تتراوح قيمتها بين ٤٠٠٠ ، ٦٠٠٠ جنيه .
- ب- أن تتعرض السيارة لحادث يترتب عليه خسارة تتراوح قيمتها بين ١٠٠٠٠ ، ١٢٠٠٠ جنيه .
- ج- وماهو متوسط قيمة الخسارة الناتجة عن الحادث الواحد بناء على البيانات السابقة .
- ٥- اذا علمت أن متوسط قيمة الخسارة من واقع خبرة ٤ سنوات سابقة قد بلغت ٢٠٠٠٠ جنيه وأن أسعار الاصلاح أو الاستبدال قد زادت بمعدل ٣٥ ٪ وينتظر زيادتها بمعدل ١٢ ٪ فى العام القادم ، ماهو تقديرك لقيمة الخسارة المتوقعة فى العام القادم .
- ٦- تكلم عن مجموعة العوامل التى يجب مراعاتها عند تقدير قيم الخسائر المتوقعة .

الوحدة الدراسية الرابعة
توقع الخسارة

الوحدة الدراسية الرابعة

موضوعها : توقع الخسارة .

هدفها : تعريف الطالب بكيفية تحديد توقع الخسارة العاجل وتوقع الخسارة المؤجل في حالة توافر التوزيع الاحتمالي لعدد وقيم الخسائر .

عناصرها :

- توقع الخسارة أو التوقع الرياضى .
- حساب توقع الخسارة في حالة توافر التوزيع الاحتمالي لعدد وقيم الخسائر .
- توقع الخسارة في حالة توافر التوزيع الاحتمالي لمجموع للخسائر الكلية .
- التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر السنوية .

توقع الخسارة أو التوقع الرياضى :

Expectation of loss or Mathematical expectation

توقع الخسارة أو التوقع الرياضى عبارة عن القيمة التى يدفعها كل فرد من الأفراد المعرضين لخطر معين بحيث تكفى لسداد الخسائر التى يتعرض لها بعضهم ، وهذا التوقع يستخدم فى حساب قسط التأمين بحيث يدفع كل فرد من الافراد المعرضين لنفس الخطر هذا القسط لشركة التأمين والتى تقوم بسداد التعويض لمن يتعرض منهم لخسارة ، وتقتضى شروط العدالة أن تتساوى المبالغ التى تحصلها شركة التأمين من الأفراد المعرضين للخطر مع المبالغ التى تدفعها لمن يتعرض منهم لخسارة (دون أن نأخذ فى الاعتبار عنصر التحويلات أو استثمار المبالغ المحصلة) أى أن :

$$\text{مجموع المبالغ المحصلة من الأفراد للشركة} = \text{مجموع المبالغ المسددة من الشركة للأفراد}$$

$$\text{توقع الخسارة} \times \text{عدد المعرضين للخطر} = \text{قيمة الخسارة} \times \text{عدد حالات الخسارة}$$

$$\therefore \text{توقع الخسارة} = \frac{\text{عدد حالات الخسارة}}{\text{عدد المعرضين للخطر}} \times \text{قيمة الخسارة}$$

$$= \text{قيمة الخسارة} \times \text{إحتمال حدوث الخسارة}$$

ويطلق على توقع الخسارة السابق بالتوقع الرياضى العاجل حيث إقتربنا أن المبالغ المحصلة من الافراد تدفع حالاً وأيضاً المبالغ المسددة للأفراد تسدد حالاً ، وكما نعلم فإن عمليات التأمين تمتد عقودها عشرات السنين وذلك بالنسبة لعقود التأمين على الحياة (بعكس عقود تأمينات الممتلكات التى غالباً ماتكون لمدة سنة واحدة فقط) وبالتالي فإن الاشتراكات (الاقساط) تحصل من الأفراد عند بداية التعاقد وتسدد التعويضات (مبالغ التأمين) بعد فترات طويلة وبالتالي فلا بد من أخذ معدل الفائدة فى الاعتبار عند حساب التوقع الرياضى وذلك بإيجاد القيمة الحالية لهذه المبالغ عند بداية التعاقد وفى هذه الحالة يطلق على توقع الخسارة : توقع الخسارة المؤجل أو التوقع الرياضى المؤجل .

∴ توقع الخسارة المؤجل = قيمة الخسارة × احتمال حدوث الخسارة × القيمة الحالية للجنيه

$$\text{والقيمة الحالية للجنيه} = \left(\frac{1}{1 + e} \right)^{\sim}$$

حيث : ع معدل فائدة استثمار المبالغ المحصلة

~ المدة التي يستحق في نهايتها مبلغ التأمين .

ونوضح فكرة التوقع الرياضى أو توقع الخسارة العاجل أو المؤجل من خلال المثالين

التاليين .

مثال (١) :

إذا كان لدينا ٢٠٠٠ شخص يمتلك كل منهم سيارة جديدة قيمتها ٥٠٠٠٠ جنية، تم الاتفاق فيما بينهم على إصلاح أى سيارة تتعرض لحادث خلال السنة فإذا علمت أن متوسط تكلفة إصلاح السيارة ٤٠٠٠ جنية وأنه ينتظر تعرض ٦٠ سيارة منها لحادث ، إحسب المبلغ الواجب تحصيله من كل شخص .

الحل :

∴ مجموع المبالغ المحصلة من الافراد كإشتراك = مجموع المبالغ المسددة للمعرضين

لحادث كتعويض

∴ الاشتراك أو القسط × عدد المشتركين = متوسط الخسارة × عدد حالات الخسارة

$$س \times 2000 = 60 \times 4000$$

حيث س الاشتراك أو القسط أو التوقع العاجل

$$س (التوقع العاجل) = \frac{60 \times 4000}{2000} = 120 \text{ جنية}$$

حل آخر:

∴ س (التوقع العاجل) = متوسط الخسارة × إحتمال حدوث الخسارة

$$∴ \text{الاشتراك أو القسط} = ٤٠٠٠ \times \frac{٦٠}{٢٠٠٠} = ١٢٠ \text{ جنيه}$$

وهذا يعنى أن كل شخص سوف يدفع مقدماً ١٢٠ جنيه وأن هناك ٢٠٠٠ مشترك وبالتالي يتم تحصيل ١٢٠ × ٢٠٠٠ = ٢٤٠٠٠٠ جنيه ، وأنه سوف يحدث ٦٠ حادث يترتب على كل حادث خسارة قدرها ٤٠٠٠ جنيه وبالتالي يتم سداد ٦٠ × ٤٠٠٠ = ٢٤٠٠٠٠ جنيه وبالتالي تتعادل المبالغ المحصلة مع المبالغ المسددة .

مثال (٢) :

إذا كان لدينا ٥٠٠٠ شخص يبلغون من العمر تمام السن ٣٥ ثم الاتفاق بينهم على سداد مبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه لكل من يبلغ منهم السن ٥٥ ، إحسب المبلغ الواجب تحصيله من كل شخص إذا علمت أنه ينتظر بلوغ ١٠٠٠ شخص السن ٥٥ وأنه يمكن إستثمار المبالغ المحصلة بمعدل ١٢ ٪ سنوياً .

الحل :

حيث أن المبلغ المتفق عليه سوف يدفع لمن يبلغ تمام السن ٥٥ أى بعد مرور ٢٠ عاماً فإن القسط أو المبلغ الواجب تحصيله من كل شخص يمثل التوقع الرياضى المؤجل .

∴ التوقع الرياضى المؤجل (الاشتراك) =

قيمة الخسارة × إحتمال حدوث الخسارة × القيمة الحالية للجنيه

$$= ٢٠٠٠٠ \times \frac{١٠٠٠}{٥٠٠٠} \times \left(\frac{١}{١,١٢^{٢٠}} \right)$$

$$= ٢٠٠٠٠ \times ٠,٢ \times ١٠,٣٦٦٧٦٥$$

$$= ٤١٤,٦٦٧ \text{ جنيه}$$

وهذا يعنى أن كل شخص سوف يدفع مبلغاً وقدره ٤١٤,٦٦٧ جنيهه وبالتالي يكون مجموع المبالغ المحصلة من ٥٠٠٠ شخص هو مبلغ $٤١٤,٦٦٧ \times ٥٠٠٠ = ٢,٠٧٣٣٣٥,٣٠٢$ جنيه وهذا المبلغ سوف يتم إستثماره بمعدل ١٢ ٪ لمدة ٢٠ سنة فتصبح جملته :

$$\text{جملة المبلغ} = \text{المبلغ} \times (١ + ع)^{\sim}$$

$$= ٢,٠٧٣٣٣٥,٣٠٢ \times (١ + ٠,١٢)^{٢٠}$$

$$= ٢,٠٧٣٣٣٥,٣٠٢ \times ٩,٦٤٦٢٩٣,٠٩٣ = ٢٠,٠٠٠,٠٠٠ \text{ جنيه}$$

والمبالغ المستحقة فى نهاية المدة هى عبارة عن مجموع المبالغ المسددة لمن يبقى منهم على قيد الحياة أى أن هناك ١٠٠٠ شخص يحصل كل منهم على ٢٠,٠٠٠ فيكون مجموع المبالغ ٢٠,٠٠٠,٠٠٠ جنيه وهذا المبلغ يساوى جملة المبالغ المحصلة من الاشخاص وبالتالي تتعادل المبالغ المحصلة مع المبالغ المسددة .

ويعتبر توقع الخسارة (التوقع الرياضى) مقياساً أكثر دقة من إستخدام إحتمال الخسارة أو حجم الخسارة المتوقعة منفرداً وذلك سواء فى تحديد درجة الخطورة أو فى تحديد تكلفة الخطر .

ولتوضيح ذلك إذا كان لدينا مصنعاً قيمته ٥٠٠,٠٠٠ جنيه وإحتمال تعرضه لحادث حريق يؤدي إلى خسارة كلية هو ٠,٠٠٣ ، فإذا أخذنا فى الاعتبار إحتمال الخسارة فقط فإن ذلك يعطى إنطباعاً بأن درجة الخطورة منخفضة جداً ، وإذا أخذنا فى الاعتبار حجم الخسارة المتوقعة فقط فإن ذلك يعطى إنطباعاً بأن درجة الخطورة مرتفعة جداً ، أما إذا أخذنا فى الاعتبار إحتمال الخسارة وحجم الخسارة معاً وهو ما يطلق عليه توقع الخسارة أو التوقع الرياضى فإن :

$$\text{توقع الخسارة} = ٥٠٠,٠٠٠ \times ٠,٠٠٣ = ١٥٠٠ \text{ جنيه} .$$

وهذه القيمة تمثل توقع الخسارة السنوية أى هى متوسط قيمة الخسارة فى الأجل الطويل أو فى ظل توافر أعداد كبيرة من الوحدات المتماثلة ، وبمعنى آخر إذا توافر لدينا ١٠٠٠ مصنعاً لهم نفس القيمة والمواصفات وتم سداد مبلغ ١٥٠٠ كاشتراك عن كل مصنع

فإنه يتجمع لدينا $1000 \times 1500 = 1500000$ جنيه سنوياً ، وحيث أنه من بين كل 1000 مصنع يتعرض 2 مصانع لخسارة كلية (2,000) فإن مجموع الخسائر تصبح $3 \times 500000 = 1500000$ وهي تتعادل مع الاشتراكات المحصلة .

حساب توقع الخسارة في حالة توافر التوزيع الاحتمالي لعدد وقيم الخسائر:

عند حسابنا للتوقع الرياضي كان يتوافر لدينا احتمال حدوث الخسارة ومتوسط قيمة الخسارة في حالة حدوثها وحاصل ضربهما عبارة عن التوقع الرياضي ، ولكن قد يتوافر لدينا التوزيع الاحتمالي لعدد الخسائر والتوزيع الاحتمالي لقيم هذه الخسائر وفي هذه الحالة يتم تحديد معدل تكرار الخسارة من التوزيع الاحتمالي لعدد الخسائر ثم تحديد متوسط قيمة الخسارة في حالة حدوثها من التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة وبضرب معدل تكرار الخسارة في متوسط قيمة الخسارة في حالة حدوثها نحصل على التوقع الرياضي أو توقع الخسارة أي أن :

توقع الخسارة أو التوقع الرياضي من التوزيعات الاحتمالية

= معدل تكرار الخسارة \times متوسط قيمة الخسارة

أو = متوسط عدد الخسائر \times متوسط قيمة الخسارة

وفيما يلي نوضح كيفية حساب توقع الخسارة من التوزيعات الاحتمالية .

مثال :

بدراسة خبرة شركة الشرق للتأمين فرع السيارات والتي تضمنت 5000 سيارة خاصة معرضة للخطر لمدة سنة حصلنا على البيانات التالية حسب عدد وقيم الخسائر .

جدول رقم (١) التوزيع الاحتمالي لعدد
الخسائر

عدد الوحدات	الخسائر
٤٣٠٠	٠
٤٦٥	١
١٨٠	٢
٤٥	٣
١٠	٤
٥٠٠٠	المجموع

جدول رقم (٢) التوزيع الاحتمالي لقيمة
الخسارة

عدد الوحدات	قيمة الخسارة
٤٨٢	٥٠٠
٢٦١	١٥٠٠
١٢٣	٢٥٠٠
٧٤	٣٥٠٠
٣٣	٤٥٠٠
١٩	٥٥٠٠
٨	٦٥٠٠
١٠٠٠	المجموع

المطلوب : حساب توقع الخسارة .

الحل :

حيث أن : توقع الخسارة = معدل تكرار الخسارة \times متوسط قيمة الخسارة

فإنه يتم حساب كلا منهما كما يلي :

جدول رقم (٣) حساب معدل تكرار الخسارة

عدد الحوادث ن	عدد الوحدات ك	الاحتمال $ح(ن) = \frac{ك}{محد ك}$	$ن \times ح(ن)$
٠	٤٣٠٠	٨٦٠	٠
١	٤٦٥	٠.٩٣	٠.٩٣
٢	١٨٠	٠.٣٦	٠.٧٢
٣	٤٥	٠.٠٩	٠.٢٧
٤	١٠	٠.٠٢	٠.٠٨
المجموع	٥٠٠٠	١.٠٠	٠.٢٠٠

∴ معدل تكرار الخسارة $\bar{ن} = محد(ن \times ح(ن))$

$$= ٠.٢$$

جدول رقم (٤) حساب متوسط قيمة الخسارة

قيمة الخسارة س	عدد الوحدات ك	الاحتمال $ح(س) = \frac{ك}{محد ك}$	$س \times ح(س)$
٥٠٠	٤٨٢	٠.٤٨٢	٢٤١
١٥٠٠	٢٦١	٠.٢٦١	٣٩١,٥
٢٥٠٠	١٢٣	٠.١٢٣	٣٠٧,٥
٣٥٠٠	٧٤	٠.٠٧٤	٢٥٩
٤٥٠٠	٣٣	٠.٠٣٣	١٤٨,٥
٥٥٠٠	١٩	٠.٠١٩	١٠٤,٥
٦٥٠٠	٨	٠.٠٠٨	٥٢
المجموع	١٠٠٠	١.٠٠	١٥٠٤

∴ متوسط قيمة الخسارة $\bar{S} = \text{م.ح (س} \times \text{ح (س)}$

$$= ١٥٠٤$$

يلاحظ أن قيم الخسارة الموجودة بالجدول تمثل متوسط القيم أو مراكز فئات الخسارة لذلك تم إستخدامها كما هي .

توقع الخسارة = معدل تكرار الخسارة \times متوسط قيمة الخسارة

$$\therefore \text{توقع الخسارة} = ٠,٢ \times ١٥٠٤ = ٣٠٠,٨$$

ملاحظات على الحل :

فى هذا المثال توافر لدينا التوزيع الاحتمالى لعدد الخسائر مستقلاً عن التوزيع الاحتمالى لقيم الخسائر ، حيث تم تقسيم عدد الوحدات المعرضة للخطر وعددها ٥٠٠٠ وحدة إلى وحدات لم تتعرض لأي حادث وعددها ٤٣٠٠ وحدة والباقية وعددها ٧٠٠ تعرضت لحادث واحد على الأقل حيث تعرضت ٤٦٥ وحدة لحادث واحد وتعرضت ١٨٠ وحدة لحادثين وتعرضت ٤٥ وحدة لثلاثة حوادث وتعرضت ١٠ وحدات لأربعة حوادث أى أن اجمالى عدد الحوادث

$$= ٤٦٥ \times ١ + ١٨٠ \times ٢ + ٤٥ \times ٣ + ١٠ \times ٤$$

$$= ٤٦٥ + ٣٦٠ + ١٣٥ + ٤٠$$

$$= ١٠٠٠ \text{ حادث}$$

$$\therefore \text{متوسط عدد الحوادث (معدل تكرار الحادث)} = \frac{١٠٠٠}{٥٠٠٠} = ٠,٢$$

كما تم توزيع عدد الحوادث (١٠٠٠ حادث) حسب قيمتها إلى حوادث متوسط قيمة الخسارة الناتجة عنها ٥٠٠ جنيه وعددها ٤٨٢ حادث ، وحوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ١٥٠٠ جنيه وعددها ٢٦١ حادث ، وحوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ٢٥٠٠ جنيه وعددها ١٢٣ حادث ، وحوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ٣٥٠٠ جنيه وعددها ٧٤ حادث ، وحوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ٤٥٠٠ جنيه وعددها ٣٣ حادث ، وحوادث متوسط قيمة الخسارة

فيها ٥٥٠٠ جنيه وعددتها ١٩ حادث ، وأخيراً حوادث متوسط قيمة الخسارة فيها ٦٥٠٠ جنيه وعددتها ٨ حوادث .

أى أن متوسط قيمة الخسارة

$$٣٥٠٠ + \frac{١٢٣}{١٠٠٠} \times ٢٥٠٠ + \frac{٢٦١}{١٠٠٠} \times ١٥٠٠ + \frac{٤٨٢}{١٠٠٠} \times ٥٠٠ =$$

$$\frac{٨}{١٠٠٠} \times ٦٥٠٠ + \frac{١٩}{١٠٠٠} \times ٥٥٠٠ + \frac{٢٣}{١٠٠٠} \times ٤٥٠٠ + \frac{٧٤}{١٠٠٠} \times$$

$$٥٢ + ١٠٤,٥ + ١٤٨,٥ + ٢٥٩ + ٣٠٧,٥ + ٢٩١,٥ + ٢٤١ =$$

$$١٥٠٤ =$$

توقع الخسارة = معدل تكرار الخسارة × متوسط قيمة الخسارة

$$\therefore \text{توقع الخسارة} = ١٥٠٤ \times ٠,٢ = ٣٠٠,٨$$

توقع الخسارة فى حالة توافر التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية :

فى هذه الحالة فانه يتوافر لدينا التوزيع الاحتمالى لقيم الخسائر بداية من صفر خسارة وحتى أقصى خسارة ممكنة ، والتوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية يشبه تماماً التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة السابق التعرض له فى المثال السابق إلا أنه يختلف عنه فى أنه يتضمن عدد الوحدات التى لم تتعرض لحادث وبالتالي تكون قيمة الخسارة المناظرة لها صفر ، وفى هذه الحالة فإنه يتضمن متوسط عدد الخسائر ومتوسط قيمة الخسارة معاً فى جدول واحد ويتم حساب توقع الخسارة من التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية كما يلى :

توقع الخسارة من التوزيع الاحتمالى للخسارات الكلية = مح (س × ح (س)) ، حيث

س مراكز الفئات ، ح (س) احتمال وقوع الخسارة فى فئة معينة

ونوضح من خلال المثال التالي كيفية حساب توقع الخسارة من التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية .

مثال

فيما يلي بيان عن التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية لمنزل قيمته ٦٥٠٠ جنيه ومعرض لحادث حريق على الأكثر خلال السنة :

جدول رقم (٥) التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية

الاحتمال ح (س)	قيمة الخسارة س
٨٠٠	صفر
٠.٩٦٤	٥٠٠
٠.٥٢٢	١٥٠٠
٠.٢٤٦	٢٥٠٠
٠.١٤٨	٣٥٠٠
٠.٠٦٦	٤٥٠٠
٠.٠٢٨	٥٥٠٠
٠.٠١٦	٦٥٠٠
١.٠٠	المجموع

المطلوب :

- حساب توقع الخسارة
- إحتمال حدوث الخسارة
- قيمة الخسارة المتوقعة
- التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة في حالة حدوثها (الخسارة الشرطية) .

الحل :

حيث أنه يتوافر لدينا التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية فإن :

توقع الخسارة = محـ (س × ح (س))

$$= \text{صفر} \times ٨٠٠ + ٠.٩٦٤ \times ٥٠٠ + ٠.٥٢٢ \times ١٥٠٠ + ٠.٢٤٦ \times ٢٥٠٠$$

$$+ ٠.١٤٨ \times ٣٥٠٠ + ٠.٠٦٦ \times ٤٥٠٠ + ٠.٠٣٨ \times ٥٥٠٠ + ٠.٠١٦ \times ٦٥٠٠$$

$$= \text{صفر} + ٤٨.٢ + ٧٨.٢ + ٦١.٥ + ٥١.٨ + ٢٩.٧ + ٢٠.٩ + ١٠.٤$$

$$\therefore \text{توقع الخسارة} = ٣٠٠.٨$$

إحتمال حدوث الحادث :

حيث أن إحتمال عدم حدوث خسارة هو ٠.٨ وأن المبنى معرض لحادث حريق على

الأكثر خلال السنة أى إما لا يتعرض لحادث خلال السنة أو يتعرض لحادث واحد فقط

$$٠.٠ = \text{إحتمال حدوث حادث} + \text{إحتمال عدم حدوث حادث} = ١$$

$$\therefore \text{إحتمال حدوث حادث} = ١ - \text{إحتمال عدم حدوث حادث}$$

$$= ١ - ٠.٨ = ٠.٢$$

قيمة الخسارة المتوقعة :

$$٠.٠ = \text{توقع الخسارة} = \text{إحتمال حدوث الحادث} \times \text{قيمة الخسارة المتوقعة}$$

$$٣٠٠.٨ = ٠.٢ \times \text{قيمة الخسارة المتوقعة}$$

$$\therefore \text{قيمة الخسارة المتوقعة} = \frac{٣٠٠.٨}{٠.٢} = ١٥٠٤ \text{ جنيه}$$

وهذه الخسارة المتوقعة تعبر عن قيمة الخسارة في حالة حدوثها ، وبمعنى آخر فإنه في حالة حدوث الخسارة فإنه يتوقع أن تكون قيمتها في المتوسط ١٥٠٤ جنيه .

التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة الشرطية :

التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة الشرطية أى التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة بشرط أن الحادث قد وقع قد تم الحصول عليه من خلال ضرب إحتمال حدوث أى خسارة شرطية في إحتمال حدوث الحادث أى أن :

إحتمال حدوث حادث وتكون قيمة الخسارة ٥٠٠ جنيه =

إحتمال حدوث الحادث × إحتمال حدوث خسارة قيمتها ٥٠٠ جنيه بشرط أن الحادث قد وقع

$$\therefore \text{إحتمال حدوث خسارة قيمتها ٥٠٠ جنيه} = \frac{\text{إحتمال حدوث حادث وقيمة الخسارة ٥٠٠ جنيه}}{\text{إحتمال حدوث الحادث}}$$

∴ إحتمال حدوث خسارة قيمتها ٥٠٠ جنيه بشرط أن الحادث قد وقع

$$= \frac{٠.٩٦٤}{٠.٢} = ٠.٤٨٢$$

، وأيضا إحتمال حدوث خسارة قيمتها ١٥٠٠ جنيه بشرط أن الحادث قد وقع

$$= \frac{٠.٥٢٢}{٢} = ٠.٢٦١$$

، وهكذا بالنسبة لباقي قيم الخسائر فنحصل على الجدول التالي :

جدول رقم (٦) التوزيع الاحتمالي للخسائر الشرطية

قيمة الخسارة	الاحتمال
٥٠٠	٠,٤٨٢
١٥٠٠	٠,٢٦١
٢٥٠٠	٠,١٢٣
٣٥٠٠	٠,٠٧٤
٤٥٠٠	٠,٠٢٣
٥٥٠٠	٠,٠١٩
٦٥٠٠	٠,٠٠٨
المجموع	١,٠٠

ملاحظة :

إذا علمنا إحتمال حدوث الحادث والتوزيع الاحتمالي للخسائر الشرطية فإنه يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي للخسائر الكلية وذلك بضرب الاحتمال المناظر لكل قيمة من قيم الخسائر الشرطية فى إحتمال حدوث الحادث مع إضافة فئة فى البداية قيمتها صفر وإحتمالها هو مكمل إحتمال حدوث الحادث (أى إحتمال عدم حدوث خسارة) .

فبالنسبة لبيانات جدول رقم (١١) والخاصة بالتوزيع الاحتمالي للخسائر الشرطية إذا علمنا أن إحتمال حدوث الحادث هو ٠,٢ فإنه بضرب الاحتمالات الموجودة بهذا الجدول فى هذا الاحتمال ثم وضع فئة فى البداية قيمتها صفر وإحتمالها ٠,٨ (١ - ٠,٢) فإننا نحصل على الجدول التالى :

جدول رقم (٧) التوزيع الاحتمالي للخسائر الكلية

قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٨٠ر
٥٠٠	٠٩٦ر
١٥٠٠	٠٥٢ر
٢٥٠٠	٠٢٤ر
٣٥٠٠	٠١٦ر
٤٥٠٠	٠٠٦ر
٥٥٠٠	٠٠٤ر
٦٥٠٠	٠٠٢ر
المجموع	١,٠٠

التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر :

Probability distribution of total losses

قد ينتج عن مسبب الخطر الواحد عدة خسائر متتابة ، وفي بعض الحالات يواجه الشيء المعرض للخطر عدة مسببات للخطر الواحد ، وفي حالات أخرى قد يتعرض الشيء المعرض للخطر لأكثر من حادث خلال السنة وأخيراً قد تكون هناك عدة وحدات معرضة للخطر وكل منها معرضة لحادث أو أكثر خلال السنة ، وفي جميع الحالات السابقة يكون من الأفضل تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر خلال السنة بدلاً من تحديد التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة الواحدة .

وقد يتساءل البعض : هل مجموع الخسائر التي تحدث خلال السنة يعتبر متغيراً عشوائياً يتم إعداد توزيعاً احتمالياً له ؟ الإجابة بالطبع نعم لأن مجموع الخسائر خلال هذا العام يختلف عن العام الماضي وسوف يختلف عن العام القادم وعن بقية الأعوام القادمة وإن

كان هذا لا يمنع حدوث حالة أن يتساوى مجموع الخسائر خلال عامين سواء متتاليين أو بينهما فاصل ، ومن خلال دراسة مجموع الخسائر لشركة معينة خلال عدد كبير من السنوات أو مجموع الخسائر السنوية خلال فترة خبره لعدد كبير من الوحدات المتماثلة فإنه يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر .

والتوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر يكون متوسطه عبارة عن متوسط عددالحوادث مضروباً في متوسط قيمة الخسارة الناتجة عن الحادث الواحد ، ويفيد التوزيع الاحتمالي لمجموع قيم الخسائر في تحديد أقصى مجموع قيم خسائر سنوية محتمل The maximum Probable yearly aggregat loss وهو عبارة عن أكبر مجموع خسائر يمكن أن يتعرض له الشيء أو الأشياء المعرضة للخطر خلال السنة باحتمال معين " وبذلك فهو يتشابه مع أقصى خسارة محتملة The Maximum Probable Loss في أنهما يعتمدان على إحتمال معين يحدده مدير الخطر حيث يحدد مدير الخطر إحتمال وليكن ٠,٠٠٢ على الأقل ويعتبر أن أى قيمة مناظرة لها تعتبر أقصى خسارة محتملة (في حالة التوزيع الاحتمالي للخسارة الواحدة) أو أقصى مجموع خسائر محتمل (في حالة التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر السنوية) ، ولكن يختلف أقصى مجموع خسائر سنوية محتملة عن أقصى خسارة محتملة في أنه يعتمد على عدد الحوادث بالإضافة إلى الخسائر الناتجة عن هذه الحوادث بعكس أقصى خسارة محتملة الذى يعتمد على قيم الخسائر الناتجة عن الحادث الواحد فقط ، وبلغة الإحتمالات فإن أقصى مجموع خسائر سنوية محتملة تعتمد فى حسابها على التوزيع الإحتمالى لمجموع الخسائر لكل عام أما أقصى خسارة فإنها تعتمد فى حسابها على التوزيع الإحتمالى للخسارة الواحدة لكل حادث .

نخلص مما سبق أن التوزيع الإحتمالى لمجموع الخسائر السنوية يوضح القيم المختلفة لمجموع الخسائر السنوية التى تحدث والإحتمال المناظر لحدوث كل قيمة من هذه القيم، ولتوضيح ذلك نأخذ التوزيع الإحتمالى التالى والخاص بمنشأة تمتلك ٥ سيارات قيمة السيارة الواحدة ٢٠٠٠٠ جنيه وكل سيارة معرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة (أو تمتلك سيارة واحدة ومعرضة لخمس حوادث على الأكثر خلال السنة) وكان التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر كما يلي :

جدول رقم (٨) التوزيع الإحتمالي لمجموع قيم الخسائر السنوية

قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٥٩٥ر
٢٠٠٠	٢٦٥ر
٤٠٠٠	١١٠ر
١٠٠٠٠	١٧ر
٢٠٠٠٠	٩ر
٤٠٠٠٠	٣ر
٦٠٠٠٠	١ر
المجموع	١,٠٠

ملاحظة :

حيث أن المنشأة تمتلك ٥ سيارات قيمة السيارة الواحدة ٢٠٠٠٠ جنيه بمجموع قيم ١٠٠٠٠٠ جنيه وهذه القيمة تمثل أقصى مجموع خسائر سنوية يمكن حدوثه ومع هذا فإن أقصى مجموع خسائر في التوزيع الإحتمالي لمجموع الخسائر السنوية هو ٦٠٠٠٠ جنيه وهذه القيمة يمكن تفسيرها إما على أساس أنها أقصى خسائر قد حدثت بالفعل خلال السنة، كما يمكن تفسيرها على أنها قيمة تحكمية تم إفتراضها للتبسيط .

أهمية تحديد التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر السنوية:

تبدو أهمية تحديد التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر السنوية فى أنه يمكن الاستفادة به فيما يلى :

- ١- متوسط هذا التوزيع يمثل قسط الخطر والذى يستخدم فى تحديد قسط التأمين (كما سنرى فيما بعد) .
 - ٢- تحديد المخصص اللازم لمواجهة الانحرافات فى قيم الخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة يعتمد فى حسابه على تباين هذا التوزيع .
 - ٣- إتخاذ أى قرار فيما يتعلق بحدود الاحتفاظ، إعادة التأمين، أسعار إعادة التأمين، عمولة أرباح إعادة التأمين يعتمد على هذا التوزيع .
 - ٤- تحديد احتمالات دمار المنشأة Ruin Probability يعتمد على الإلمام بالتوزيع الإحتمالى لمجموع الخسائر .
 - ٥- تحديد طريقة مواجهة الخطر المناسبة يحتاج إلى الإلمام بالتوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر .
 - ٦- قياس الخطر (كما سنرى فيما بعد) يعتمد على متوسط وتباين التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر .
 - ٧- وأخيراً فإن تحديد التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر يتميز بتلخيص جميع البيانات الخاصة بالخسائر فى نموذج واحد .
- ومن خلال بيانات التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر فإنه يمكن الحصول على العديد من المعلومات المفيدة منها :

١- حساب إحتمال أن تتعرض المنشأة لخسارة:

من خلال بيانات التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر يتضح لنا أن إحتمال أن مجموع قيم الخسائر يساوى صفر هو ٥٩٥ ر . ومجموع خسائر صفر يحدث فى حالة عدم حدوث أى حادث وبالتالي فإن هذا الإحتمال يمثل إحتمال عدم حدوث أى حادث، وحيث أن جميع الإحتمالات الممكنة تتمثل فى :

إحتمال عدم حدوث خسارة، وإحتمال حدوث خسارة .

فإن مجموعهما يساوى واحد صحيح .

وحيث أن إحتمال عدم حدوث خسارة = ٥٩٥ ر

∴ إحتمال حدوث خسارة = ١ - ٥٩٥ ر = ٤٠٥ ر

كما يمكن الوصول إلى إحتمال حدوث خسارة من خلال تجميع جميع الإحتمالات الخاصة بحدوث خسارة إبتداء من الخسارة التى قيمتها ٢٠٠٠ وحتى ٦٠٠٠٠، أى أن :

إحتمال حدوث خسارة = ٢٦٥ ر + ١١٠ ر + ٠١٧ ر + ٠٠٩ ر + ٠٠٢ ر + ٠٠١ ر = ٤٠٥ ر

٢- حساب إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى أو يزيد عن قيمة معينة :

أيضا يستفاد من تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى تحديد إحتمال أن مجموع خسائر العام القادم تساوى على الأقل قيمة معينة ، فمن خلال بيانات التوزيع الاحتمالى السابق يمكن حساب الاحتمالات الآتية :

١/٢ - إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ١٠٠٠٠ جنيه على الأقل

= إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ١٠٠٠٠ جنيه

+ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠٠

+ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٤٠٠٠٠

+ إحتمال مجموع الخسائر يساوى ٦٠٠٠٠

= ٠١٧ ر + ٠٠٩ ر + ٠٠٢ ر + ٠٠١ ر = ٠٣٠ ر

$$2/2 - \text{إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى } 20000 \text{ جنيه على الأقل} =$$

$$= \text{إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى } 20000 \text{ جنيه}$$

$$+ \text{إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى } 40000 \text{ جنيه}$$

$$+ \text{إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى } 60000 \text{ جنيه}$$

$$= 0.09 + 0.03 + 0.01 = 0.13$$

٣- حساب متوسط مجموع الخسائر السنوية :

يمكن تحديد متوسط مجموع الخسائر السنوية (أو توقع مجموع الخسائر السنوية) من خلال بيانات التوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر السنوية، وهذا المتوسط يعكس عنصرين هما: معدل تكرار الخسارة، ومتوسط قيمة الخسارة .

ويجب مراعاة أن متوسط مجموع الخسائر السنوية هو قيمة متوقعة فى الاجل الطويل بمعنى أن الاحتمالات المناظرة لكل قيمة من قيم مجموع الخسائر السنوية الموجودة بجدول التوزيع الإحتمالى للخسائر السنوية كل إحتمال يعبر عن نسبة السنوات التى تتحقق فيها كل قيمة من قيم مجموع الخسائر، والقيمة المتوقعة لمجموع الخسائر السنوية (توقع مجموع الخسائر) تحسب كما يلى :

متوسط مجموع الخسائر السنوية = مجموع حاصل ضرب كل مجموع خسائر فى احتمال تحققه

$$\bar{M} = \sum (M \times H(M))$$

حيث : \bar{M} = متوسط مجموع الخسائر السنوية

M = قيم مجموع الخسائر السنوية المختلفة .

$H(M)$ = إحتمال حدوث كل قيمة من قيم مجموع الخسائر السنوية

ومن بيانات جدول رقم (١٣) والخاص بالتوزيع الإحتمالى لمجموع قيم الخسائر

السنوية فإن:

$$\text{المتوسط م} = \text{صفر} \times ٥٩٥ + ٢٠٠٠ \times ٢٦٥ + ٤٠٠٠ \times ١١٠ + ١٠٠٠٠ \times ١٧ + ٢٠٠٠٠ \times ٩ + ٤٠٠٠٠ \times ٣ + ٦٠٠٠٠ \times ١$$

$$= \text{صفر} + ٥٢٠ + ٤٤٠ + ١٧٠ + ١٨٠ + ١٢٠ + ٦٠$$

$$\therefore \text{المتوسط} = ١٥٠٠ \text{ جنيه}$$

وهذه القيمة تعبر عن متوسط الخسائر التي تتعرض لها المنشأة في الأجل الطويل وليس في كل سنة على حدة .

٤- حساب احتمال أن الخسائر السنوية تساوى أو تزيد عن قسط التأمين:

بفرض أن شركة التأمين عرضت على المنشأة تغطية الخسائر التي قد تتعرض لها المنشأة مقابل قسط تأمين سنوى قدره ٤٠٠٠ جنيه، في هذه الحالة يمكن حساب احتمال أن الخسائر السنوية تساوى على الأقل هذه القيمة حيث .

إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٤٠٠٠ جنيه على الأقل

$$= \text{إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية تساوى ٤٠٠٠ جنيه}$$

$$+ \text{إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية تساوى ١٠٠٠٠ جنيه}$$

$$+ \text{إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية تساوى ٢٠٠٠٠ جنيه}$$

$$+ \text{إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية تساوى ٤٠٠٠٠ جنيه}$$

$$+ \text{إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية تساوى ٦٠٠٠٠ جنيه}$$

$$= ١١٠ + ١٧ + ٩ + ٣ + ١ + ٠ = ١١٤$$

٥- حساب احتمال أن تحدث خسائر تؤدي إلى مشاكل مالية خطيرة للمنشأة:

في بعض الحالات تتعرض المنشأة إلى مجموع خسائر سنوية تكون أكبر من قدرة المنشأة على مواجهتها وخاصة فيما يتعلق بتدبير السيولة اللازمة لها مما يؤدي إلى مشاكل خطيرة قد تؤدي إلى عدم قدرة المنشأة على مواصلة نشاطها مرة أخرى، وبفرض أن المنشأة

تعتبر أن أى خسائر سنوية قيمتها ٤٠٠٠٠ جنيه أو أكثر يترتب عليها مشاكل مالية خطيرة،
فى هذه الحالة يمكن حساب أن الخسائر السنوية تساوى على الأقل هذه القيمة حيث :

إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٤٠٠٠٠ جنيه على الأقل

= إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٤٠٠٠٠ جنيه

+ إحتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٦٠٠٠٠ جنيه

$$= ٠.٠٣ + ٠.٠١ = ٠.٠٤$$

٦- حساب أقصى خسارة ممكنة وأقصى خسارة محتملة:

من خلال بيانات التوزيع الإحتمالى لمجموع الخسائر يتضح لنا أن أقصى خسارة
ممكنة هى ٦٠٠٠٠ جنيه، وفيما يتعلق بأقصى خسارة محتملة فإنها تتوقف على الإحتمال
الذى يفترضه مدير الخطر، فإذا فرضنا أن مدير الخطر قدر أقصى خسارة محتملة بأنها
الخسارة التى يكون إحتمال تحققها أقل من ٠.٥ % فإن أقصى خسارة محتملة تساوى
٤٠٠٠٠ جنيه، أما إذا قدر الإحتمال على أنه أقل من ١ % فإن أقصى خسارة محتملة
تنخفض إلى ٢٠٠٠٠ جنيه .

أسئلة على الوحدة الدراسية الرابعة

١- مصنع قيمته ٢٠٠٠٠٠ جنيه معرض لخطر حريق ، تبلغ قيمة الأرض والمباني غير القابلة للاحتراق ٦٠٠٠٠ جنيه وبدراسة الخسارة خلال الفترة الماضية حصلنا على التوزيع الاحتمالي التالي لقيم الخسارة :

قيمة الخسارة	٢٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	٦٠٠٠٠	٨٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠
الاحتمال	٥٠	٣٠	١٤	٥	١

إحسب : أقصى خسارة ممكنة ، أقصى خسارة محتملة مستخدماً معيار احتمال أقل من ١٠ ٪ ، ثم احسب الخسارة المتوقعة .

٢- إتفق مجموعة من أعضاء نادى الصيد عمرهم ٤٠ سنة عددهم ٦٠٠٠ شخص على سداد ٥٠٠٠ جنيه لكل من يبلغ تمام السن ٥٥ فإذا علمت أنه ينتظر أن يتوفى منهم ١٢٠٠ خلال هذه المدة وأن معدل الفائدة ٩ ٪ سنوياً إحسب المبلغ الواجب تحصيله من كل شخص .

٣- عرضت شركة النصر لصناعة السيارات ٣٠٠٠ سيارة فيات ١٢٨ للبيع بسعر ٣٠٠٠٠ جنيه وقد طلب المشتريين من الشركة أن تقوم بسداد تعويض لكل من تتعرض سيارته لحادث خلال السنة الأولى من شرائها ، فإذا علمت أن معدل تكرار الخسارة هو ١٥ ٪ ، وأن متوسط الخسارة الناتجة عن الحادث الواحد قدرت بمبلغ ٤٠٠٠ جنيه حدد سعر بيع السيارة مقابل قيام الشركة بهذه المهمة .

٤- بدراسة خيرة شركة المهندس للتأمين فرع السطوح حصلنا على البيانات التالية عن عدد وقيم الخسائر :

أولاً : التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث :

عدد الحوادث	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الوحدات	٨٣٨٠	١٣١٠	٢٥٠	٥٠	١٠

ثانياً : التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة :

قيمة الخسارة	صفر-	- ٢٠٠٠	- ٤٠٠٠	- ٦٠٠٠	٨٠٠٠ - ١٠٠٠٠
عدد الوحدات	١٢٠٠	٦٠٠	١٣٠	٥٠	٢٠

المطلوب حساب توقع الخسارة.

٥- فيما يلي بيان عن التوزيع الاحتمالي للخسارات الكلية لمصنع قيمته ٢٠٠٠٠٠ ومعرض لحادث حريق على الاكثر خلال السنة .

قيمة الخسارة	صفر	٢٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	٦٠٠٠٠	٨٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	١٢٠٠٠٠
الاحتمال	٧٠٠ ر	١٣٥ ر	٩٠ ر	٤٥ ر	١٥ ر	٩ ر	٦ ر

المطلوب :

أ- حساب توقع الخسارة ، قيمة الخسارة المتوقعة ، احتمال حدوث الخسارة

ب- تحديد التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة بشرط أنها قد حدثت (التوزيع الاحتمالي للخسائر الشرطية) .

٦- فيما يلي بيان عن التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر السنوية لسيارات شركة الضياء للنقل السياحي :

مجموع الخسائر	صفر	٥٠٠	١٠٠٠	٥٠٠٠	١٠٠٠٠	٢٥٠٠٠	٥٠٠٠٠	المجموع
الاحتمال	٨٠ ر	١٥ ر	٣ ر	١ ر	٧ ر	٢ ر	١ ر	١

المطلوب : أ - حساب احتمال أن تتعرض الشركة لخسارة خلال العام القادم .

ب- حساب احتمال أن تتعرض الشركة لخسائر خلال العام القادم مجموعها ٥٠٠٠ جنيه على الأقل

ج- تحديد متوسط مجموع الخسائر السنوية .

د- تحديد أقصى خسارة ممكنة .

الوحدة الدراسية الخامسة
زمن التعرض للخطر والتوزيع
التكراري لعدد الحوادث

الوحدة الدراسية الخامسة

موضوعها :

زمن التعرض للخطر والتوزيع التكرارى لعدد الحوادث

هدفها :

تعريف الدارس بكيفية حساب زمن التعرض للخطر وإعداد التوزيع التكرارى لعدد الحوادث .

عناصرها :

– حساب زمن التعرض للخطر

– التوزيع التكرارى لعدد الحوادث

– توزيع ذى الحدين

حساب زمن التعرض للخطر :

حتى يمكن تحديد التوزيع الإحتمالي المناسب لعدد الخسائر لابد من تحديد عدد الوثائق المعرضة للخطر لعام كامل (الزمن المعرض للخطر) ثم تحديد عدد الخسائر، ويتم تحديد الزمن المعرض للخطر باستخدام الطريقة الأربعة وعشرينية كما يتضح من البيانات التالية للوثائق المصدرة في فرع الحريق لاحدى الشركات خلال فترة الخبرة من ٩٠/١/١ إلى

٩٢/١٢/٣١

جدول يوضح عدد الوثائق المصدرة كل شهر وزمن التعرض للخطر

السنوات الشهور	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	المجموع	زمن التعرض للخطر
يناير	٩٧٥	١٠٠٨	١٠٨٦	٣٠٦٩	$294120 = \frac{23}{24} \times 3069$
فبراير	١٠٤٦	١١٠١	١١٢٩	٣٢٧٦	$286650 = \frac{21}{24} \times 3276$
مارس	٩٢٧	١٠٠٤	١٠٨٣	٣٠١٤	$2386082 = \frac{19}{24} \times 3014$
إبريل	١٠٥١	١٠٦١	١١٧٧	٣٢٨٩	$2329708 = \frac{17}{24} \times 3289$
مايو	٩٧٧	١٠٢٣	١٠٤٤	٣٠٤٨	$1905 = \frac{15}{24} \times 3048$
يونيو	٩٧٢	٩١٤	٩٠٨	٢٧٩٤	$1513417 = \frac{13}{24} \times 2794$
يوليو	١٠٢٢	٩٧٨	١٠٤٥	٣٠٤٥	$1395625 = \frac{11}{24} \times 3045$
أغسطس	١٠٤٥	١٠١٢	١٠٣٢	٣٠٨٩	$1158275 = \frac{9}{24} \times 3089$
سبتمبر	١٠٦٨	١٠١٤	١١٢٥	٣٢٨٨	$959 = \frac{7}{24} \times 3288$
أكتوبر	١٠٧٧	١٠٩٨	١٠٨٦	٣٢٦١	$679275 = \frac{5}{24} \times 3261$
نوفمبر	١١٠٢	١١٥٧	١٢٠٩	٣٤٦٩	$433625 = \frac{3}{24} \times 3469$
ديسمبر	١٠٩٦	١١١٤	١١٤١	٣٣٥٤	$13975 = \frac{1}{24} \times 3354$
المجموع					١٨٧٠٨

ويتضح من الجدول السابق أن زمن التعرض للخطر (عدد الوثائق المعرضة للخطر بالسنوات) هو ١٨٧٠٨ وثيقة ، وبدراسة هذه الوثائق حسب تعرضها للحوادث خلال فترة الخبرة أتضح أن هناك وحدات مؤمن عليها لم يحدث لها خسارة وأن هناك وحدات أخرى تعرضت لحادث خلال الفترة وأن هناك وحدات تعرضت لحادثين خلال الفترة وأن هناك وحدات تعرضت لثلاثة حوادث خلال الفترة ، وفيما يلي بيان عن توزيع عدد الوثائق المعرضة للخطر حسب عدد الحوادث :

عدد الوثائق	عدد الحوادث
١٧٥٤٩	صفر
١١٠٤	١
٥٣	٢
٢	٣
صفر	٤
١٨٧٠٨	المجموع

ويعتبر توزيعاً : بواسون وذى الحدين السالب من أكثر التوزيعات ملائمة واستخداماً لعدد الحوادث بالنسبة للتأمينات العامة ، وحتى يمكن إختبار مدى ملائمة البيانات السابقة لتوزيع بواسون أو لتوزيع ذى الحدين السالب فإنه يتم حساب معالم التوزيع الفعلى السابق (حساب المتوسط والتباين) أولاً ثم مساواتها بمعالم التوزيع النظرى واستخدامها فى توليد تكرارات نظرية ولى ذلك إختبار جودة التوفيق وسوف نقوم فيما يلى بدراسة لأهم التوزيعات الإحتمالية المناسبة لعدد الحوادث :

توزيع ذى الحدين : The Binomial Distribution

فى حالة إلقاء قطعة نقود فإننا نكون إزاء نتيجتين محددتين :

إما الحصول على صورة أو الحصول على كتابة ويفرض أن إحتمال الحصول على صورة وليكن L هو إحتمال ثابت فى كل محاولة وبالتالي فإن إحتمال عدم الحصول على

صورة (كتابة) يمثل $1 - L$ ، وإذا أجرينا هذه التجربة عدة مرات وليكن K فإننا نحصل على تتابع من الصور والكتابة وبترتيبات متعددة ولتكن :

صورة ، صورة ، كتابة ، صورة ، صورة ، صورة ، كتابة ، . . . ، كتابة .

والحالة السابقة تحدث بإحتمال :

$$L \times L \times (1 - L) \times L \times L \times (1 - L) \times \dots \times (1 - L)$$

وإحتمال حدوث s من المرات المتتالية الأولى صورة، \sim - s من المرات التالية كتابة هو :

$$K(s) = L^s (1 - L)^{s - \sim}$$

وبأخذ عدد الطرق المختلفة لحدوث s من المرات صورة من بين \sim (عدد مرات التجربة) وبأى ترتيب ، \sim - s من المرات كتابة يكون الإحتمال :

$$K(s) = \binom{\sim}{s} L^s (1 - L)^{s - \sim} , s = \text{صفر} , 1 , 2 , \dots , \sim$$

محاولات بيرنولى : Bernoulli Trials

كحالة خاصة من نظرية ذى الحدين عندما يكون عدد مرات التجربة مرة واحدة

(أى $\sim = 1$) وهنا تصبح دالة كثافة الإحتمال :

$$K(s) = \binom{1}{s} L^s (1 - L)^{1 - s} , s = \text{صفر} , 1 .$$

عند $s = \text{صفر}$ فإن :

$K(\text{صفر}) = (1 - L)$ وهذا يعنى أن ناتج التجربة هو فشل (أى ظهور كتابة إذا كنا نركز على الصورة)

وعند $s = 1$ فإن :

$K(1) = L$ وهذا يعنى أن ناتج التجربة هو نجاح (ظهور صورة)

مثال ١ :

تبين من فحص إنتاج أحد المصانع أنه من بين كل ٥٠٠ وحدة منتجة توجد ١٠٠ وحدة معيبة ، فإذا سحبنا ٥ وحدات مع الاحلال (يتم إرجاع الوحدة الأولى قبل عملية السحب التالية وهكذا . .) إحصب الإحتمالات الآتية :

- أ- إحتمال الحصول على ٤ وحدات جيدة .
- ب- إحتمال الحصول على ٥ وحدات جيدة .
- ج- إحتمال عدم الحصول على أى وحدة جيدة .
- د- إحتمال الحصول على ٤ وحدات جيدة على الأقل .
- هـ- إحتمال الحصول على ٣ وحدات معيبة
- و- كون جدول توزيع ذى الحدين حسب عدد الوحدات الجيدة.

الحل :

$$\sim = ٥$$

ل = إحتمال الحصول على وحدة جيدة فى السحبة الواحدة

$$٨ = \frac{٤٠٠}{٥٠٠} =$$

$$٨ - ١ = ل - ١$$

$$٢ =$$

٠. ، إحتمال الحصول على س من الوحدات الجيدة = ${}^ك(س)$

$$٠. ، {}^ك(س) = {}^ك(س) \times ل \times (١ - ل)^{س-ك}$$

أ- إحتمال الحصول على ٤ وحدات جيدة = ${}^ك(٤)$

$${}_1(2) \times {}_4(1) \times {}_5(4) = (4) \quad \text{ك}$$

$${}_1(2) \times {}_4(1) \times \frac{{}_5(4)}{{}_1(1) \times {}_4(4)} =$$

$$2 \times 0.96 \times 4 =$$

$$7.68 =$$

ب- احتمال الحصول على ٥ وحدات جيدة = ك (٥)

$${}_0(2) \times {}_0(1) \times {}_5(5) = (5) \quad \text{ك}$$

$$1 \times 0.22768 \times 1 =$$

$$0.22768 =$$

$$\text{أو } {}_0(2) \times {}_0(1) \times {}_5(5) = (5) \quad \text{ك}$$

$$\frac{{}_0(2)}{{}_0(2)} \times \frac{{}_0(1)}{{}_0(1)} \times \frac{{}_5(5)}{{}_5(5)} = (5) \quad \text{ك}$$

$$0.22768 = \frac{{}_0(2)}{{}_0(2)} \times \frac{{}_0(1)}{{}_0(1)} \times 0.96 =$$

ج- احتمال عدم الحصول على أي وحدة جيدة = ك (صفر)

$${}_0(2) \times {}_0(1) \times {}_5(5) = (5) \quad \text{ك}$$

$$0.22 \times 1 \times \frac{{}_5(5)}{{}_5(5) \times {}_5(5)} =$$

$$0.22 \times 1 \times 1 =$$

$$= 0.0032$$

د- إحتمال الحصول على ٤ وحدات جيدة على الأقل =

إحتمال الحصول على ٤ وحدات جيدة + إحتمال الحصول على ٥ وحدات جيدة

$$= 0.96 + 0.0032$$

$$= 0.9632$$

هـ- إحتمال الحصول على ٣ وحدات معيبة = إحتمال الحصول على وحدتين جيدتين

إحتمال الحصول على وحدتين جيدتين = 2K

$${}^2K = {}^0(2) \times {}^1(1) \times {}^2(2)$$

$$= 0.008 \times 0.64 \times \frac{1}{2 \times 3}$$

$$= 0.008 \times 0.64 \times 10$$

$$= 0.0512$$

و- لتكوين جدول توزيع ذى الحدين حسب عدد الوحدات الجيدة فإنه يتم الحصول على

جميع الإحتمالات الخاصة بالوحدات الجيدة إبتداء من عدم الحصول على أى وحدة

جيدة ثم وحدة جيدة ثم وحدتين جيدتين وهكذا ... حتى الحصول على جميع

الوحدات جيدة ويتم ذلك كما يلي :

$${}^0K = {}^0(2) \times {}^0(1) \times {}^0(0) = 0.0032$$

$${}^1K = {}^1(2) \times {}^1(1) \times {}^0(0) = 0.064$$

$${}^2K = {}^2(2) \times {}^2(1) \times {}^0(0)$$

$$= 0.512$$

$${}^2_{(2)} \times {}^3_{(8)} \times \binom{5}{3} = {}_K(3) \\ = 2.48$$

$${}^1_{(2)} \times {}^4_{(8)} \times \binom{5}{4} = {}_K(4) \\ = 4.96$$

$${}^{\text{صفر}}_{(2)} \times {}^0_{(8)} \times \binom{5}{5} = {}_K(5) \\ = 22768$$

حل آخر باستخدام العلاقة التتابعية :

$$\frac{L}{L-1} \times \frac{S-1}{S+1} \times {}_K(S) = {}_K(S+1)$$

$$0.0032 = {}_K(\text{صفر})$$

$$\frac{8}{2} \times \frac{5}{1} \times 0.0032 = {}_K(1)$$

$$= 0.64$$

$$\frac{8}{2} \times \frac{1-5}{1+1} \times {}_K(1) = {}_K(2)$$

$$\frac{8}{2} \times \frac{4}{2} \times 0.64 =$$

$$= 0.512$$

$$\frac{8}{2} \times \frac{2-5}{1+2} \times {}_K(2) = {}_K(3)$$

$$= ٠.٥١٢ \times \frac{٣}{٢} \times ٤ = ٢.٤٨ \text{ ر}$$

$$\leq (٤) \quad = \frac{٨}{٢} \times \frac{٣-٥}{١+٢} \times (٣) \leq$$

$$= ٢.٤٨ \times \frac{٢}{٤} \times ٤ = ٤.٩٦ \text{ ر}$$

$$\leq (٥) \quad = \frac{٨}{٢} \times \frac{٤-٥}{١+٤} \times (٤) \leq$$

$$= ٤.٩٦ \times \frac{١}{٥} \times ٤ = ٣.٩٦٨ \text{ ر}$$

إعداد جدول ذى الحدين حسب عدد الوحدات الجيدة :

يتم إعداد هذا الجدول من خانتين الأولى توضح قيم المتغير العشوائى والثانية توضح احتمال الحصول عليها وذلك على النحو التالى :

جدول توزيع ذى الحدين حسب الوحدات الجيدة

عدد الوحدات الجيدة	الإحتمال
صفر	$K(صفر) = \binom{٨}{٠} (٨) صفر^٠ (٢) صفر^٠ = ٠.٠٠٣٢$
١	$K(١) = \binom{٨}{١} (٨) ١^١ (٢) صفر^٤ = ٠.٠٦٤٠$
٢	$K(٢) = \binom{٨}{٢} (٨) ٢^٢ (٢) صفر^٤ = ٠.٥١٢٠$
٣	$K(٣) = \binom{٨}{٣} (٨) ٣^٢ (٢) صفر^٢ = ٢٠.٤٨٠$
٤	$K(٤) = \binom{٨}{٤} (٨) ٤^٤ (٢) صفر^٠ = ٤٠.٩٦$
٥	$K(٥) = \binom{٨}{٥} (٨) ٥^٠ (٢) صفر^٤ = ٣٢٧٦٨$
المجموع	١

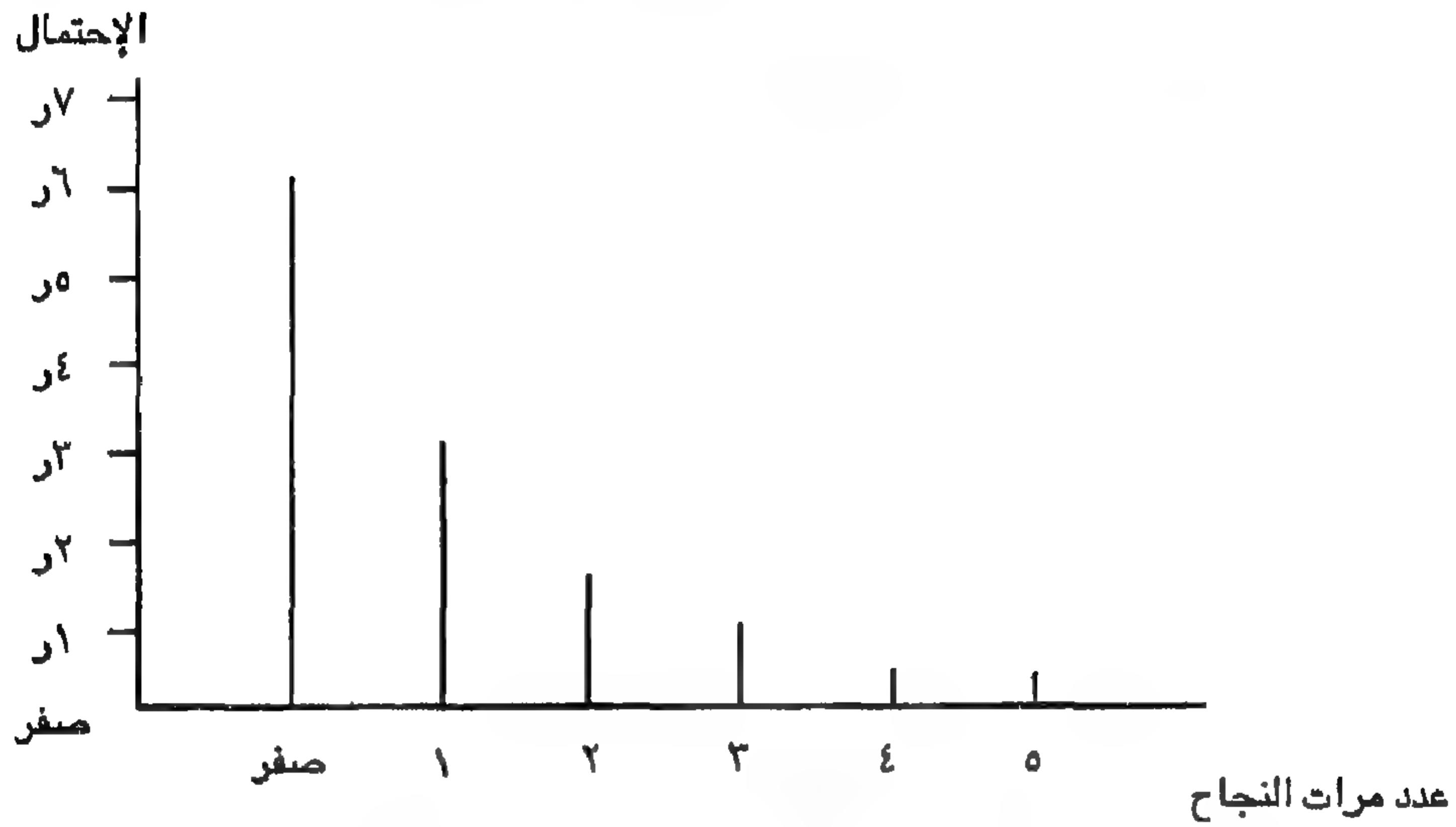
ويستفاد من الجدول السابق في حساب جميع الإحتمالات الممكنة والمتعلقة بالسلع الجيدة أو المعيبة على السواء .

ملاحظة هامة :

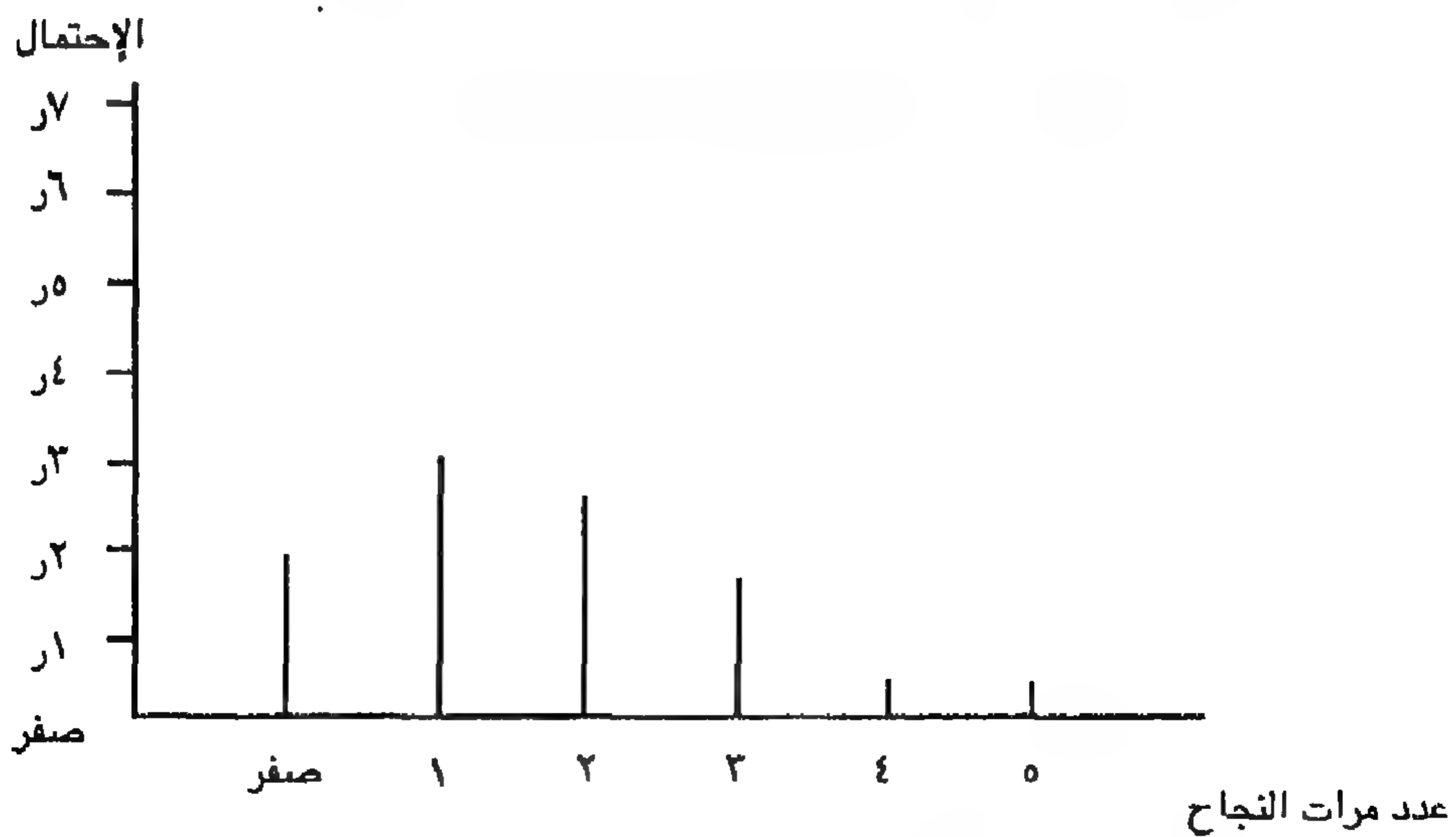
هناك مجموعة من الشروط التي يجب توافرها حتى يمكن تطبيق أو استخدام توزيع ذى الحدين وهي :

- ١- تتكون التجربة من مجموعة من المحاولات المتتالية والمتماثلة .
- ١- ينتج عن كل محاولة نتيجتين إما نجاح أو فشل للمتغير الذي نراقبه
- ٣- إحتمال النجاح ثابت في كل محاولة وأيضاً إحتمال الفشل .
- ٤- المحاولات المتتالية مستقلة تماماً عن بعضها البعض بمعنى أن نتيجة المحاولة الأولى لا تؤثر على نتيجة المحاولة الثانية ، كما أن المحاولة الثانية لا تتأثر بالمحاولة الأولى ولا تؤثر في المحاولة الثالثة .

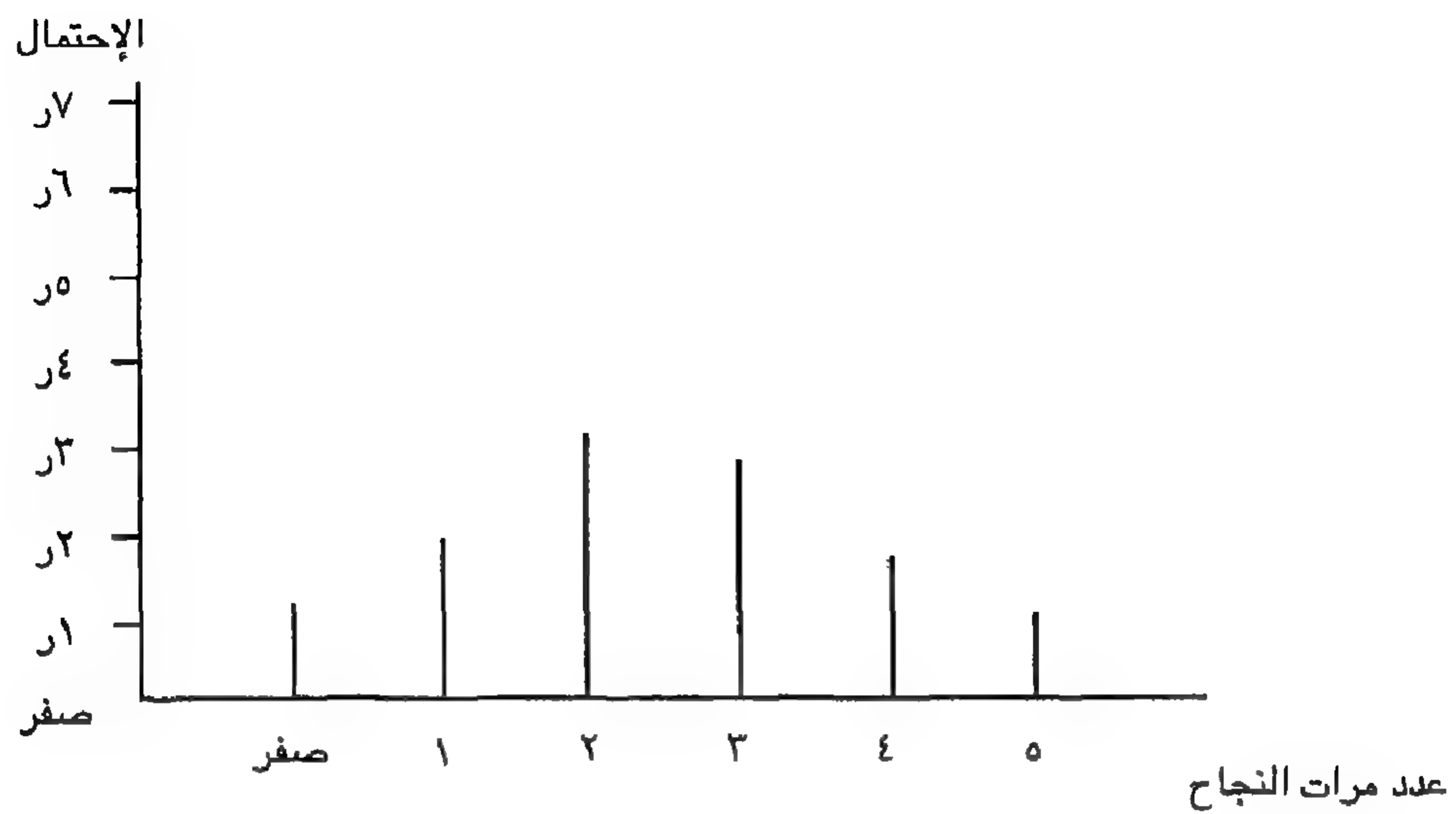
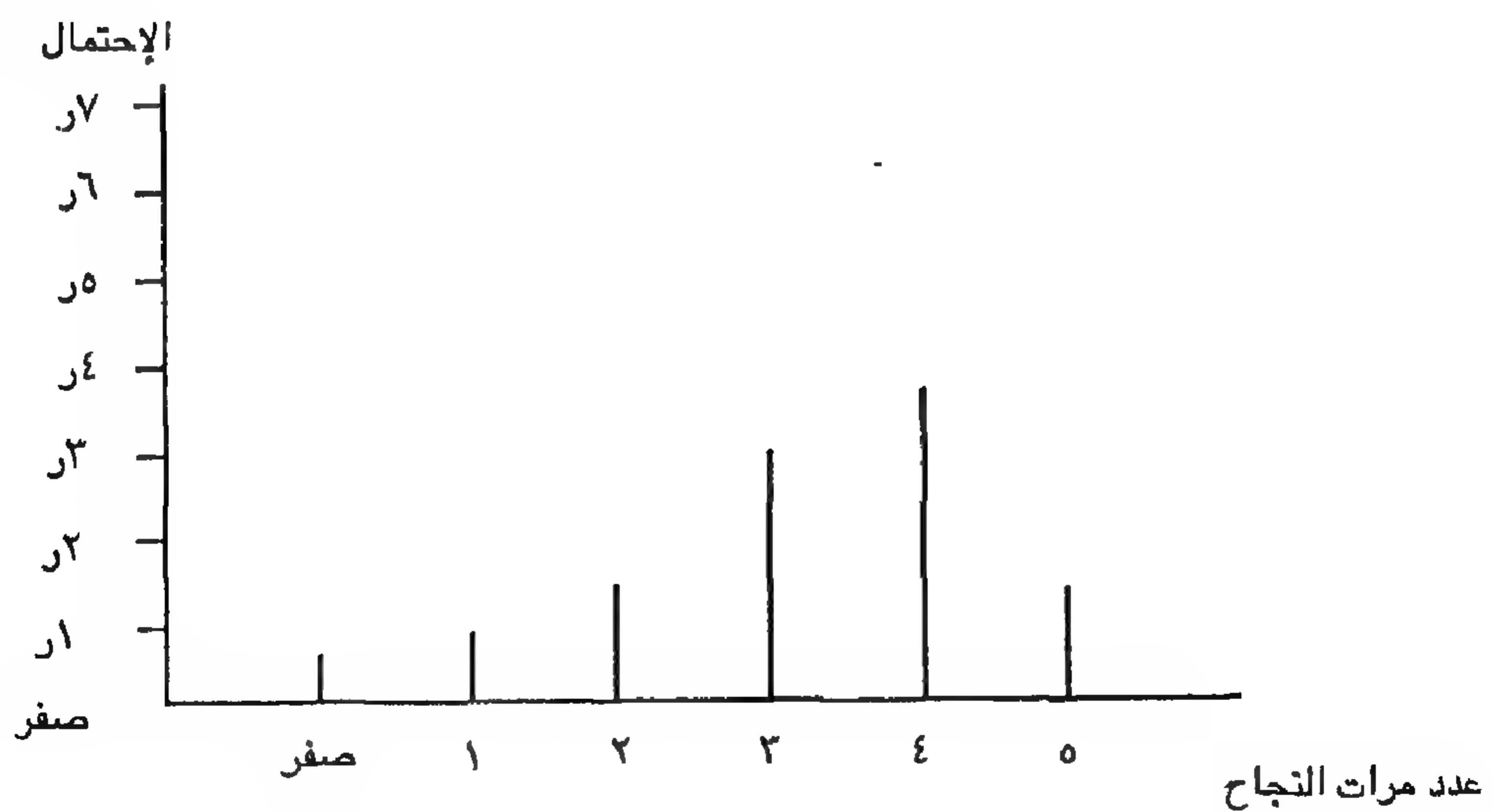
هذا ويتميز توزيع ذي الحدين بأن دالة كثافة الإحتمال تكون متماثلة كلما إقترب إحتمال النجاح من $\frac{1}{2}$ لكل محاولة وذلك بغض النظر عن حجم العينة (عدد مرات التجربة) ويتضح ذلك من الأشكال البيانية الآتية والتي توضح شكل دالة كثافة الإحتمال في حالة $n = 5$ وعند إحتمالات نجاح مختلفة :

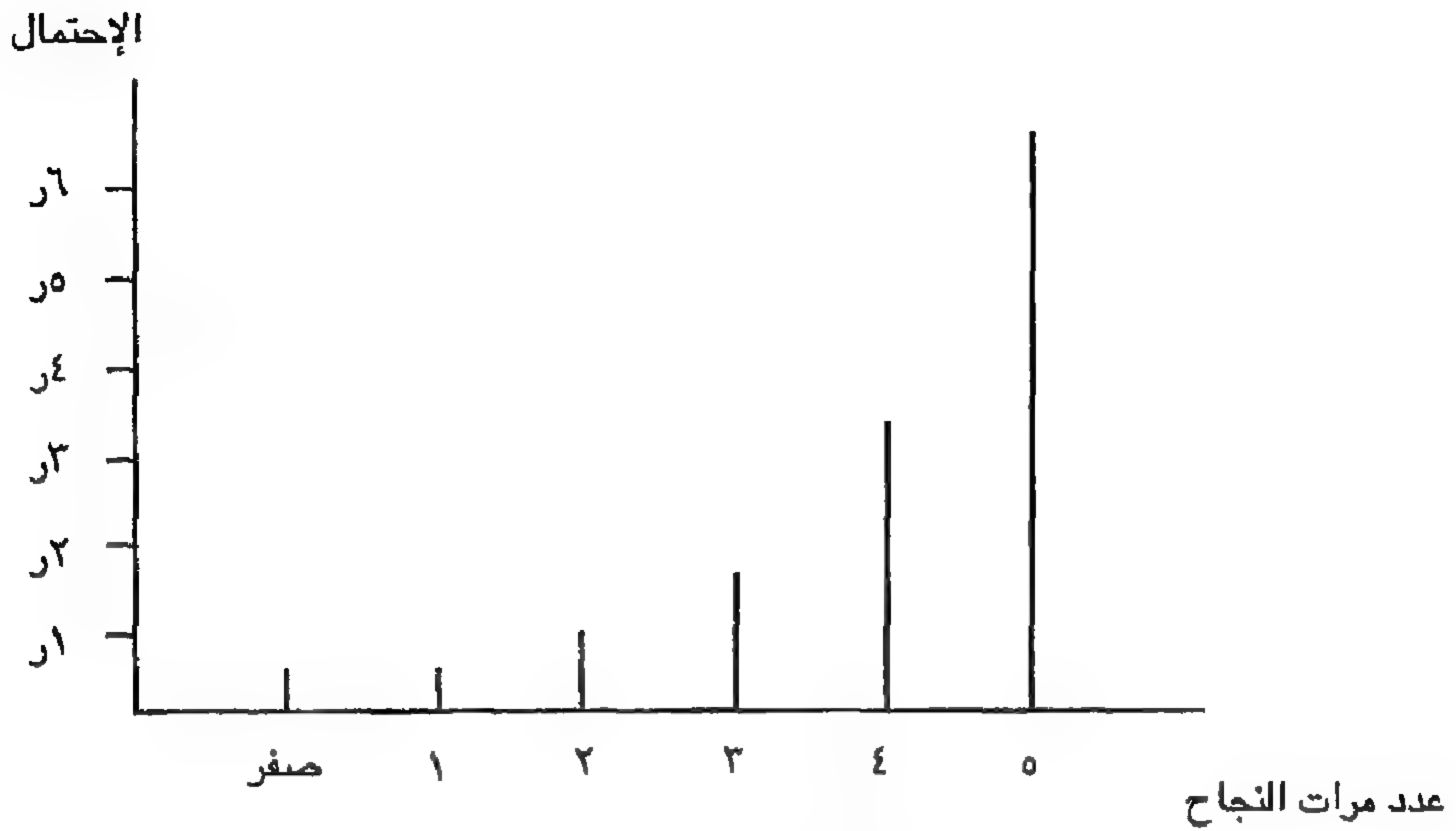


شكل (١) دالة كثافة الاحتمال عند $p = 0.1$

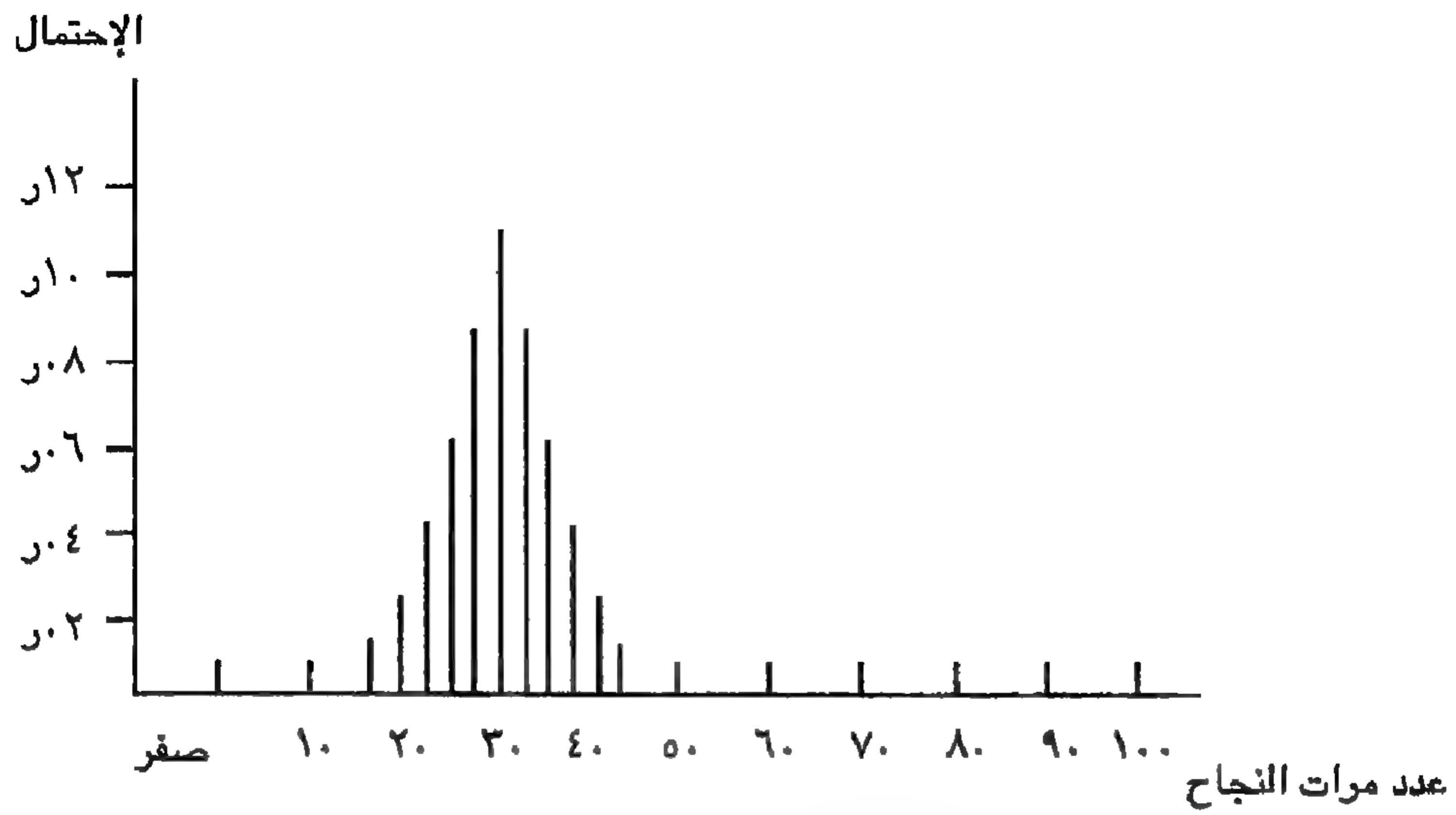


شكل (٢) دالة كثافة الاحتمال عند $p = 0.3$

شكل (٣) دالة كثافة الاحتمال عند $l = 0.5$ شكل (٤) دالة كثافة الاحتمال عند $l = 0.7$

شكل (٥) دالة كثافة الاحتمال عند $n = ٩$

كما أن دالة كثافة الإحتمال لتوزيع ذي الحدين تصبح متماثلة بدرجة أكبر كلما زاد عدد مرات إجراء التجربة (كلما زادت قيمة n) وذلك بغض النظر عن قيمة إحتمال النجاح في المحاولة الواحدة وسواء كان الإحتمال قريباً من $\frac{1}{2}$ أو غير قريب، ونستفيد من هذه الخاصية في حساب الإحتمالات الخاصة بتوزيع ذي الحدين باستخدام جدول التوزيع الطبيعي الذي سيتم دراسته فيما بعد وذلك في حالة كبر حجم العينة (زيادة قيمة n أو عدد مرات التجربة) ، والشكل التالي يوضح دالة كثافة الإحتمال لتوزيع ذي الحدين عندما يكون إحتمال النجاح في المحاولة الواحدة $\frac{1}{2}$ وفي حالة زيادة حجم العينة .



شكل (٦) دالة كثافة الاحتمال عند $\sim = 100$

مثال (٥)

فيما يلي بيان عن نتائج فرع السيارات بإحدى شركات التأمين خلال عام ١٩٩٠

عدد الوثائق	عدد مرات الخسائر
٤٨٢	صفر
٣٨٦	١
١١٦	٢
١٥	٣
١	٤
١٠٠٠	المجموع

فإذا علمت أن عدد الخسائر يتبع توزيع ذى الحدين فاحسب الإحتمالات الآتية :

أ- إحتمال عدم حدوث أى حادث .

ب- إحتمال حدوث حادث واحد .

ج - إحتمال حادثين على الأقل .

الحل : يتم أولا تقدير معالم توزيع ذى الحدين من خلال بيانات العينة كما يلي :

جدول رقم ٤/٢

عدد الخسائر س	عدد الوثائق ك	عدد الخسائر X عدد الوثائق س X ك
صفر	٤٨٢	صفر
١	٣٨٦	٣٨٦
٢	١١٦	٢٣٢
٣	١٥	٤٥
٤	١	٤
المجموع	١٠٠٠	٦٦٧

$$\bar{s} = \frac{\text{مجموع س ك}}{\text{مجموع ك}}$$

$$= \frac{٦٦٧}{١٠٠٠}$$

$$= ٦٦٧$$

وبمساواة المتوسط النظري بالمتوسط الفعلي أى: $\mu = \bar{x}$

$$\mu = \bar{x} = 1667$$

$$\mu = \bar{x} = 1667$$

$$\bar{x} = 1667$$

$$= 16670$$

$$1 - 1 = 16670 - 1 = 16669$$

(أ) احتمال عدم حدوث أى خسارة = \bar{x} (صفر)

$$\bar{x} \text{ (صفر)} = \left(\begin{matrix} \text{صفر} \\ \text{صفر} \end{matrix} \right) (16670) \text{ صفر} (16670) =$$

$$= 16670$$

(ب) احتمال حدوث حادث واحد = \bar{x} (١)

$$\bar{x} = (1) = \frac{\bar{x} \text{ (صفر)}}{\bar{x} - \text{صفر}} = \frac{1}{16670 - 16670}$$

$$= 16670 \times \frac{1 - \text{صفر}}{\text{صفر} + 1} = \frac{16670}{16670}$$

$$= 16670$$

(ج) إحتمال حدوث حادثتين على الأقل

$$= 1 - (\text{إحتمال حدوث حادث واحد} + \text{إحتمال عدم حدوث أى حادث})$$

$$= 1 - (٤٨٢.٦ \text{ ر} + ٣٨٥٨٧٩ \text{ ر})$$

$$= 1 - ٨٦٧٩٣٩ \text{ ر}$$

$$= ١٣٢.٦١ \text{ ر}$$

أسئلة على الوحدة الدراسية الخامسة

١- فيما يلى بيان عن نتائج فرع السطور خلال عام ١٩٩١ بإحدى شركات التأمين المصرية :

عدد الوثائق	عدد الخسائر
٩٦١	صفر
٧٧١	١
٢٣٣	٢
٣٢	٣
٣	٤
٢٠٠٠	المجموع

فإذا علمت أن عدد الخسائر يتبع توزيع ذى الحدين فاحسب :

أ- احتمال حدوث حادثين للوثيقة الواحدة

ب- احتمال حدوث حادثين على الأقل للوثيقة الواحدة

ج- احتمال عدم حدوث أى حادث

د- عدد الوثائق التى تتعرض لحادثين خلال العام القادم إذا كان عدد الوثائق المتوقع هو ٢٥٠٠ وثيقة .

٢- إذا علمت أن متوسط عدد الحوادث فى فرع السطو للوثيقة الواحدة هو ٢.٤ وأن توزيع

الوثائق حسب عدد الحوادث يتبع توزيع ذى الحدين وأن الحد الأقصى لعدد الحوادث

للوثيقة الواحدة هو ٤ حوادث فاحسب :

أ- احتمال حدوث حادثين فقط خلال العام .

ب - احتمال حدوث حادثين على الأقل خلال العام .

ج - عدد الوثائق التى ينتج عنها ٣ حوادث إذا كان عدد الوثائق المتوقع خلال العام

القادم هو ٢٨٠٠٠ وثيقة .

الوحدة الدراسية السادسة
توزيع بواسون كتوزيع
مناسب لعدد الحوادث

الوحدة الءراسفة الساءسة

موضوعها: ءوزفع بواسون كءوزفع مناسب لعدد الءواءء

هءفها : ءعرفف الطالب بكفففة إساءءءام ءوزفع بواسون فف ءساب الاحءماءاء المءءلفة المءعلقة بعدد الءواءء.

عناصرها:

– ءصائص ءوزفع بواسون.

– إساءءام ءوزفع بواسون كءقرفب لءوزفع ذى الءءفن.

خصائص توزيع بواسون: The poisson distribution

يعتبر توزيع بواسون من التوزيعات الخاصة بالحوادث النادرة وذلك لأن هناك متغيرات عشوائية تكون احتمالات حدوثها (ل) نادرة ويكون عدد مرات التجربة (\sim) كبيراً جداً وفى هذه الحالة فإن هذه المتغيرات العشوائية تتبع توزيع بواسون ومنها:

١- عدد الحوادث اليومية للسيارات التى تسير على طريق معين.

٢- عدد السيارات التى تصل إلى محطة الوقوف خلال دقيقة معينة.

٣- عدد السيارات طالبة الخدمة فى إحدى محطات البنزين.

٤- عدد الأخطاء المطبعية فى الصفحة لكتاب معين.

٥- عدد العملاء الذين يصلون إلى أحد المطاعم فى لحظة معينة.

٦- عدد الطائرات التى تصل إلى أحد المطارات فى لحظة معينة.

فعلى سبيل المثال إذا افترضنا أن متوسط عدد السيارات طالبة الخدمة فى محطة الخدمة والتى تصل خلال ساعة معينة هو ٢٠ سيارة ($\mu = 20$)، وإذا افترضنا أن معدل وصول السيارات خلال لحظة معينة يتبع توزيع بواسون فإنه يجب مراعاة الشروط الآتية :

١- أن احتمال وصول سيارة واحدة لمحطة الخدمة خلال فترة قصيرة جداً ولتكن ثانية واحدة يكون نسبة من الفترة الزمنية التى حسب على أساسها المتوسط أى يساوى $\frac{1}{60 \times 60} = \frac{1}{3600}$ وتسمى الفترة الزمنية التى يحسب على أساسها الاحتمال بالفترة الجزئية أو الفرعية.

٢- أن احتمال وصول أكثر من سيارة واحدة خلال الفترة الجزئية يساوى صفر .

٣- أن عدد السيارات التى تصل خلال أى فترة جزئية مستقل تماماً عن عدد السيارات التى تصل خلال أى فترة جزئية أخرى.

وتأخذ دالة كثافة الإحتمال لتوزيع بواسون الشكل الآتى:

$$K(s) = \frac{e^{-\mu} \times \mu^s}{s!}, \quad s = \text{صفر}, 1, 2, \dots$$

حيث μ هي متوسط عدد حالات النجاح خلال الفترة $t = \mu \times L$ ،

هـ أساس اللوغاريتم الطبيعي وتساوى ٢.٧١٨٢٨

وتوجد علاقة هامة تستخدم فى حساب الإحتمالات المتتالية حيث:

$$K(s+1) = \frac{e^{-\mu} \times \mu^{s+1}}{(s+1)!} = \frac{K(s)}{s+1} \times \mu$$

$$\therefore \frac{K(s+1)}{K(s)} = \frac{\mu}{s+1}$$

$$\therefore K(s+1) = K(s) \times \frac{\mu}{s+1}$$

والأمثلة التالية توضح كيفية استخدام وتطبيق توزيع بواسون.

مثال ١: إذا علمت أن متوسط عدد الحوادث المبلغة لإحدى شركات التأمين هو حادثين يومياً،

وأن عدد الحوادث يتبع توزيع بواسون ، فبالنسبة لأحد الأيام احسب الإحتمالات

الآتية:

أ- إحتمال حدوث حادث واحد خلال اليوم.

ب- إحتمال عدم حدوث أى حادث خلال اليوم.

ج- إحتمال حدوث ٣ حوادث خلال اليوم.

د- إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال اليوم الواحد.

الحل : $\mu = 2$ أ- إحتمال حدوث حادث واحد خلال اليوم = $\mu = 2$ (١)

$$\frac{\mu^{-\mu} \times \mu^{\text{س}}}{\text{س}} = \text{س} (١)$$

$$\frac{2^{-271828} \times 2^{\text{س}}}{\text{س}} = \text{س} (١) \therefore$$

$$\frac{2}{2^{271828}} =$$

$$\frac{2}{7389.5} =$$

$$270.67 \text{ ر} =$$

ب- إحتمال عدم حدوث أى حادث = $\text{س}(\text{صفر})$

$$\frac{2^{-271828} \times 2^{\text{صفر}}}{\text{صفر}} = \text{س}(\text{صفر}) \therefore$$

$$\frac{1}{2^{271828}} =$$

$$\frac{1}{7389.5} =$$

$$13534 \text{ ر} =$$

ج- إحتمال حدوث ٢ حوادث = $\text{س}(2)$

$$\frac{{}^3(2) \times 2^{-(271828)}}{21} = \quad (3) \quad$$

$$\frac{8}{72890.5 \times 6} =$$

$$= 18.45 \text{ ر}$$

د- احتمال حدوث حادثين على الأقل = احتمال حدوث حادثين + احتمال حدوث ٣ حوادث + احتمال حدوث ٤ حوادث +

= ١ - (احتمال حدوث حادث واحد + احتمال عدم حدوث أى حادث).

$$= 1 - (27.67 \text{ ر} + 13534 \text{ ر})$$

$$= 1 - 0.604 \text{ ر}$$

$$= 0.399 \text{ ر}$$

مثال ٢: فيما يلى بيان عن توزيع عدد الوثائق حسب عدد الخسائر خلال عام ١٩٩٢ وذلك فى إحدى شركات التأمين المصرية:

عدد الوثائق	عدد حالات الخسارة
٧٤٤٩	صفر
٥٢١٣	١
١٨٢٥	٢
٤٢٧	٣
٧٥	٤
١٠	٥
١	٦

فإذا علمت أن توزيع عدد الخسائر قريب جداً من التوزيع البواسونى فاحسب:

أ - احتمال حدوث ٣ خسائر خلال العام.

ب- إحتمال حدوث ٢ خسائر على الأقل خلال العام.

ج- إحتمال حدوث ٣ خسائر على الأكثر خلال العام.

د- إحتمال عدم حدوث أى خسارة.

الحل: حيث أن متوسط عدد الحوادث غير معلوم فإنه يتم حسابه من العينة كما يلي:

عدد حالات الخسارة	عدد الوثائق	إجمالي حالات الخسارة
س	ك	س × ك
صفر	٧٤٤٩	صفر
١	٥٢١٣	٥٢١٣
٢	١٨٢٥	٣٦٥٠
٣	٤٢٧	١٢٨١
٤	٧٥	٣٠٠
٥	١٠	٥٠
٦	١	٦
المجموع	١٥٠٠٠	١٠٥٠٠

$$\bar{s} = \frac{\text{مجموع س ك}}{\text{مجموع ك}}$$

$$= \frac{١٠٥٠٠}{١٥٠٠٠}$$

$$= ٧ر$$

وبمساواة المتوسط الفعلي \bar{s} بالمتوسط النظري μ

$$\therefore \mu = ٧ر$$

أ- إحتمال حدوث ٢ خسائر خلال العام = $K(٢)$

$$\therefore K(س) = \frac{\mu^{-س} \times \mu^س}{س!}$$

$$\therefore \text{ك}(٣) = \frac{{}^2_7 \times {}^7 - 271828}{\text{ك} 3} = 0.28388126$$

ب- إحتمال حدوث ٣ خسائر على الأقل خلال العام = إحتمال حدوث ٣ خسائر

+ إحتمال حدوث ٤ خسائر

+ إحتمال حدوث ٥ خسائر

+ إحتمال حدوث ٦ خسائر

$$\text{إحتمال حدوث ٣ خسائر} = \text{ك}(٣) = \frac{{}^2_7 \times {}^7 - 271828}{\text{ك} 3} = 0.28388126$$

$$\text{إحتمال حدوث ٤ خسائر} = \text{ك}(٤) = \frac{{}^4_7 \times {}^7 - 271828}{\text{ك} 4} = 0.049679$$

$$\text{إحتمال حدوث ٥ خسائر} = \text{ك}(٥) = \frac{{}^5_7 \times {}^7 - 271828}{\text{ك} 5} = 0.00695509$$

$$\text{إحتمال حدوث ٦ خسائر} = \text{ك}(٦) = \frac{{}^6_7 \times {}^7 - 271828}{\text{ك} 6} = 0.000811427$$

\therefore إحتمال حدوث ٣ خسائر على الأقل = 0.28388126

$$+ 0.049679$$

$$+ 0.00695509$$

$$+ 0.000811427$$

$$= 0.34132677$$

ج- إحتمال حدوث ٣ خسائر على الأكثر خلال العام = إحتمال حدوث ٣ خسائر

+ إحتمال حدوث خسارتين

+ احتمال حدوث خسارة واحدة

+ احتمال عدم حدوث أى خسارة

$$\therefore \text{إحتمال حدوث ٣ خسائر} = \binom{3}{3} = \frac{{}^3P_3 \times {}^3P_0 - {}^3P_3 \times {}^3P_0}{3!} = \frac{{}^3P_3 \times {}^3P_0 - {}^3P_3 \times {}^3P_0}{3!} = 0.28388126$$

$$\text{، احتمال حدوث خسارتين} = \binom{2}{2} = \frac{{}^2P_2 \times {}^2P_0 - {}^2P_2 \times {}^2P_0}{2!} = 0.121663399$$

$$\text{، احتمال حدوث خسارة واحدة} = \binom{1}{1} = \frac{{}^1P_1 \times {}^1P_0 - {}^1P_1 \times {}^1P_0}{1!} = 0.347609712$$

$$\text{، احتمال عدم حدوث أى خسارة} = \binom{0}{0} = \frac{{}^0P_0 \times {}^0P_0 - {}^0P_0 \times {}^0P_0}{0!} = 0.496585303$$

∴ احتمال حدوث ٣ خسائر على الأكثر = 0.28388126

+ 0.121663399

+ 0.347609712

+ 0.496585303

= 0.965867323

$$\text{د- احتمال عدم حدوث أى خسارة} = \binom{0}{0} = \frac{{}^0P_0 \times {}^0P_0 - {}^0P_0 \times {}^0P_0}{0!} = 0.496585303$$

مثال ٣: فيما يلى بيان عن توزيع عدد الوثائق حسب عدد حالات الخسارة خلال سنة ١٩٩٠

وذلك فى إحدى شركات التأمين:

عدد الوثائق	عدد حالات الخسارة
١٧٥٤٩	صفر
١١٠٤	١
٥٢	٢
٢	٣
صفر	٤
١٨٧٠٨	المجموع

فإذا علمت أن توزيع الخسائر قريب جداً من التوزيع البواسوني فاحسب:

أ- احتمال عدم حدوث أى خسارة خلال السنة.

ب- احتمال حدوث خسارة واحدة خلال السنة.

ج- احتمال حدوث خسارتين.

د- احتمال حدوث ٣ خسارات.

الحل: حيث أن متوسط التوزيع غير معلوم فإنه يتم حسابه من العينة كما يلي:

عدد حالات الخسارة	عدد الوثائق	إجمالي حالات الخسارة
س	ك	س × ك
صفر	١٧٥٤٩	صفر
١	١١٠٤	١١٠٤
٢	٥٣	١٠٦
٣	٢	٦
٤	صفر	صفر
المجموع	١٨٧٠٨	١٢١٦

$$\bar{s} = \frac{\text{مجموع س ك}}{\text{مجموع ك}}$$

$$\therefore \bar{s} = \frac{١٢١٦}{١٨٧٠٨}$$

$$= ٠.٦٥$$

وبمساواة المتوسط النظري μ بالمتوسط الفعلي \bar{s}

$$\therefore \mu = ٠.٦٥$$

أ- احتمال عدم حدوث أى خسارة خلال السنة = $P(X=٠)$ (صفر)

$$\frac{(271828) \times 10^{-2} \times (0.65)^0}{\text{صفر}} = \text{صفر}$$

$$\frac{1}{(271828) \times 10^{-2}} =$$

$$\frac{1}{1.67159} = 937.67$$

ب- احتمال حدوث خسارة واحد = د (١)

$$\frac{(271828) \times 10^{-2} \times (0.65)^1}{1} = \text{د (١)}$$

$$\frac{0.65}{(271828) \times 10^{-2}} =$$

$$\frac{0.65}{1.67159} = 0.606$$

ج- احتمال حدوث خسارتين = د (٢)

$$\frac{(271828) \times 10^{-2} \times (0.65)^2}{2} = \text{د (٢)}$$

$$= 0.197955$$

د- احتمال حدوث ٣ خسائر = د (٣)

$$\frac{(271828) \times 10^{-2} \times (0.65)^3}{2} = \text{د (٣)}$$

$$= 0.04289$$

. حل آخر: بإستخدام العلاقة التتابعية:

$$\dots \leq (س+١) = د(س) \times \frac{\mu}{س+١}$$

$$\dots \leq (\text{صفر}) = ٩٣٧٠٦٧$$

$$\therefore \leq (١) = د(\text{صفر}) \times \frac{\mu}{١}$$

$$= ٩٣٧٠٦٧ \times \frac{٠.٦٥}{١}$$

$$= ٠.٦٠٩٠٦$$

$$, \leq (٢) = (١) \times \frac{\mu}{٢}$$

$$\leq (٢) = ٠.٦٠٩٠٦ \times \frac{٠.٦٥}{٢}$$

$$= ٠.١٩٧٩٥٥٥$$

$$, \leq (٣) = (٢) \times \frac{\mu}{٣}$$

$$= \frac{٠.٦٥ \times ٠.١٩٧٩٥٥٥}{٢}$$

$$= ٠.١٩٧٩٦$$

إستخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذى الحدين:

يستخدم توزيع بواسون كتقريب جيد لتوزيع ذى الحدين فى حالة توافر شرطين:

الشرط الأول: أن الإحتمال يكون صغيراً جداً (ل تمثل إحتمال النجاح وقيمتها صغيرة جداً)

الشرط الثانى: أن عدد مرات إجراء التجربة يكون كبيراً جداً (\sim تكون كبيرة)

وفى هذه الحالة فإنه يتم إستخدام توزيع بواسون فى حساب الإحتمالات المختلفة

والخاصة بتوزيع ذى الحدين مع وضع $\mu = \lambda \times \sim$

ويمكن إثبات ذلك كما يلى:

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{دالة ذي الحدين } \mu(s) &= \binom{L}{s} \sim^{L-1} s - s \\
 &= \frac{\binom{L}{s}}{\binom{L}{s-1} \times s} = \\
 &= \frac{1}{s} \cdot \frac{L!}{(L-s)! (s-1)!} = \\
 &= \frac{L!}{(L-s)! (s-1)!}
 \end{aligned}$$

وبأخذ \sim عامل مشترك من الحدود داخل القوس ينتج أن:

$$\begin{aligned}
 \mu(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{L!}{(L-s)! (s-1)!} \times \dots \times \left(\frac{1-s}{s} - 1 \right) \times \dots \times \left(\frac{2}{s} - 1 \right) \left(\frac{1}{s} - 1 \right) 1 \\
 &\text{وبوضع } \mu = L \times \sim
 \end{aligned}$$

$$\therefore \mu(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{L!}{(L-s)! (s-1)!} \times \dots \times \left(\frac{1-s}{s} - 1 \right) \times \dots \times \left(\frac{2}{s} - 1 \right) \left(\frac{1}{s} - 1 \right) 1$$

ويأخذ نهاية المقدار السابق عندما تؤول \sim إلى مالا نهاية ينتج أن:

$$\begin{aligned}
 \text{نهاية } \mu(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \cdot \frac{L!}{(L-s)! (s-1)!} \times \dots \times \left(\frac{1-s}{s} - 1 \right) \times \dots \times \left(\frac{2}{s} - 1 \right) \left(\frac{1}{s} - 1 \right) 1 \\
 &= \frac{1}{s} \times \frac{L!}{(L-s)! (s-1)!} \times \dots \times \left(\frac{1-s}{s} - 1 \right) \times \dots \times \left(\frac{2}{s} - 1 \right) \left(\frac{1}{s} - 1 \right) 1
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s} \times \frac{L!}{(L-s)! (s-1)!} \times \dots \times \left(\frac{1-s}{s} - 1 \right) \times \dots \times \left(\frac{2}{s} - 1 \right) \left(\frac{1}{s} - 1 \right) 1$$

والمثال التالي يوضح أهمية الاستفادة من هذا التقريب.

مثال ٤: إذا كان من بين كل ٢٠٠٠ وحدة منتجة يوجد ٤٠ وحدة معيبة، وإذا سحبنا ١٠٠ وحدة من انتاج هذا المصنع مع الاحلال احسب احتمال أن يكون من بينها ٣ وحدات معيبة.

$$\text{الحل: احتمال الحصول على وحدة واحدة معيبة من انتاج المصنع} = \frac{40}{2000} = 0.02$$

$$\text{إحتمال الحصول على ٣ وحدات يعبنة من بين انتاج ١٠٠ وحدة} = \binom{100}{3} (0.02)^3 (0.98)^{97}$$

$$= \frac{\binom{100}{3} (0.02)^3 (0.98)^{97}}{1823} =$$

ونلاحظ أن حساب مفكوك المقدار السابق يحتاج لمجهود كبير، ولكن طالما أن الإحتمال صغير ($L=0.2$) وأن قيمة \sim كبيرة ($\sim=100$)،

فإنه يمكن إستخدام توزيع بواسون كتقريب جيد وذلك على النحو التالي:

$$\frac{\mu^s \times e^{-\mu}}{s!} = P(s)$$

$$\mu = L \times \sim$$

$$= 0.2 \times 100$$

$$= 20$$

$$\therefore P(2) = \frac{e^{-20} \times 20^2}{2!} = 0.271828$$

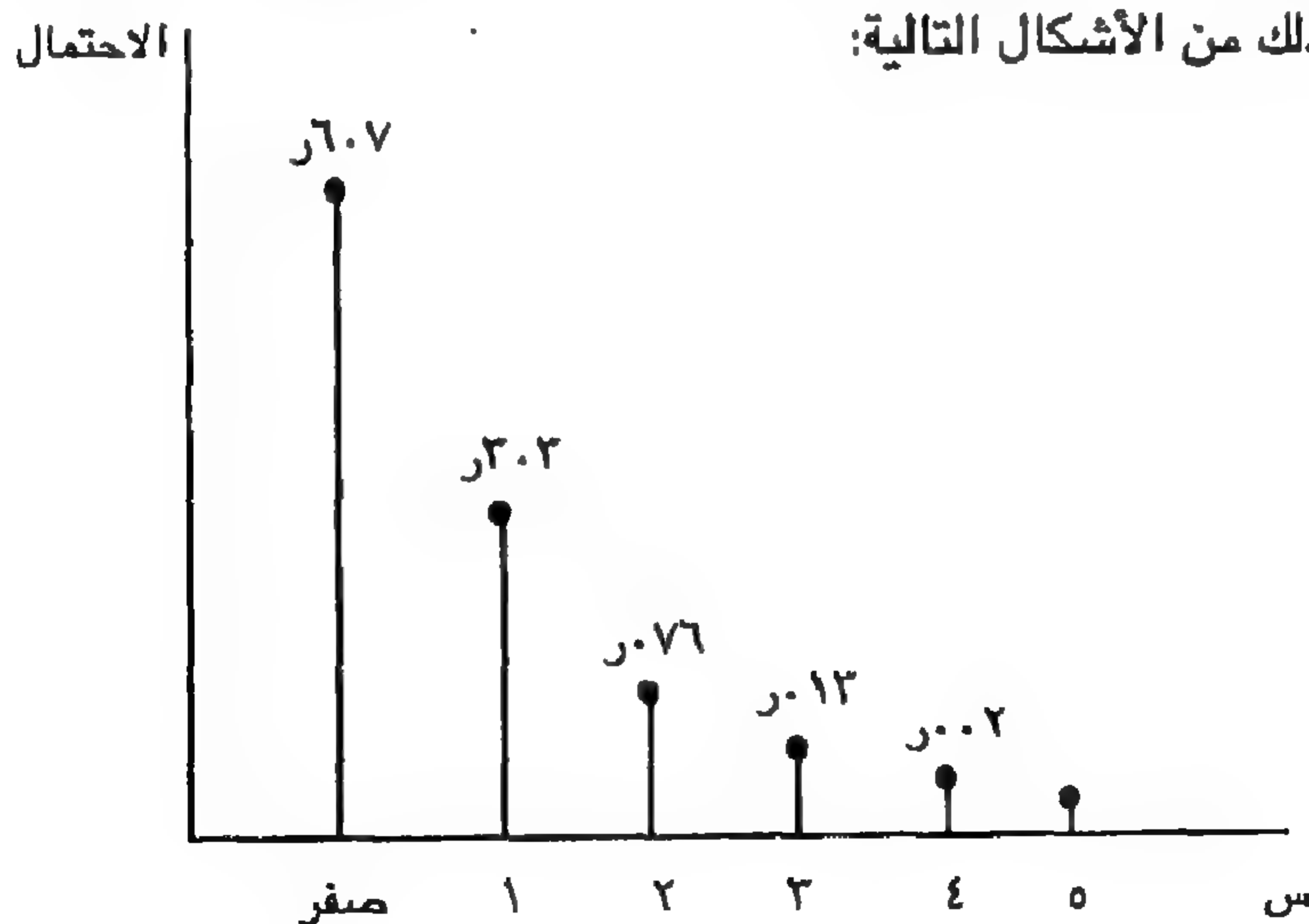
$$= \frac{8}{e^{20} \times 6}$$

$$= 0.1805$$
 وهي قريبة من النتيجة السابقة

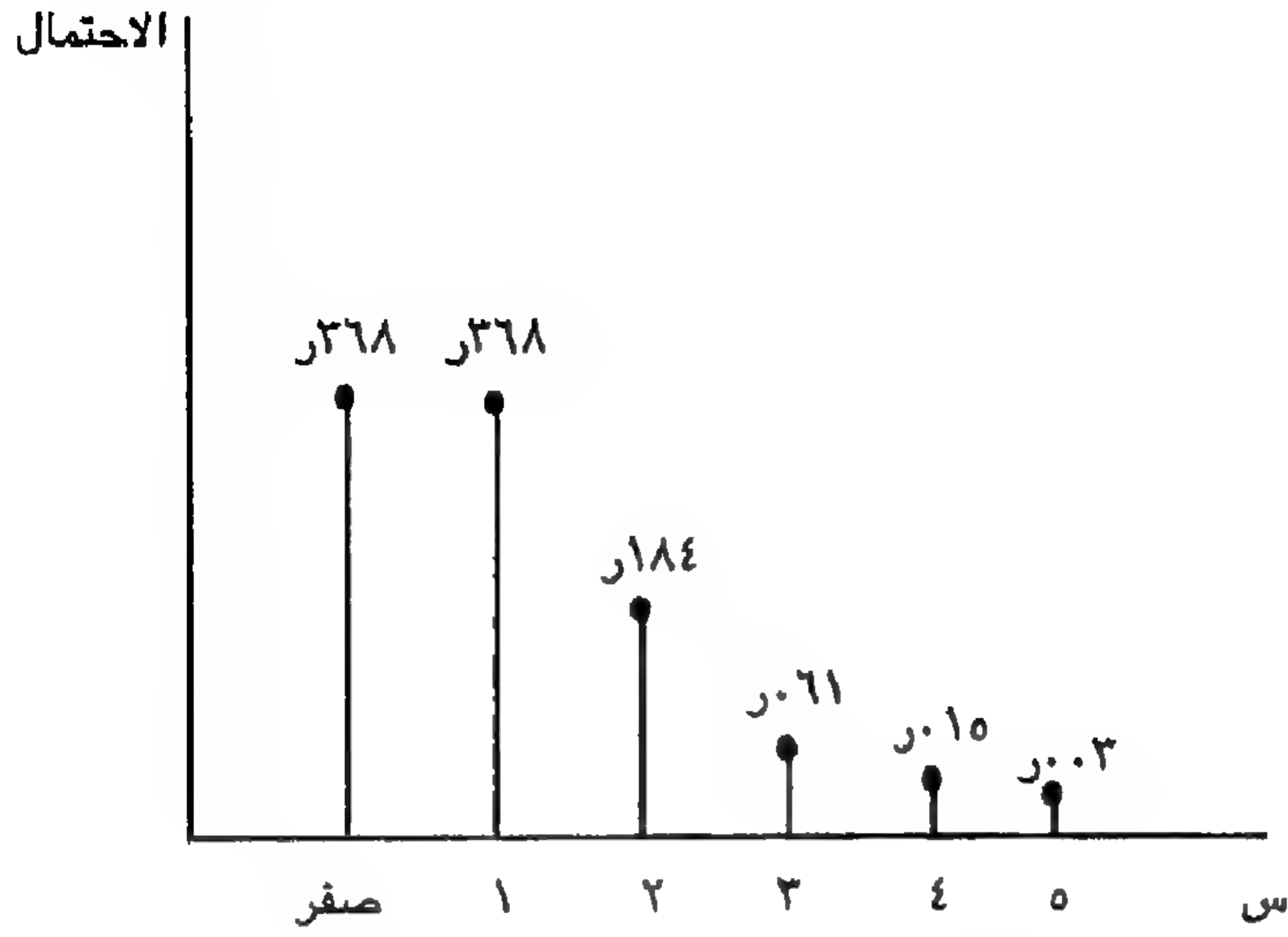
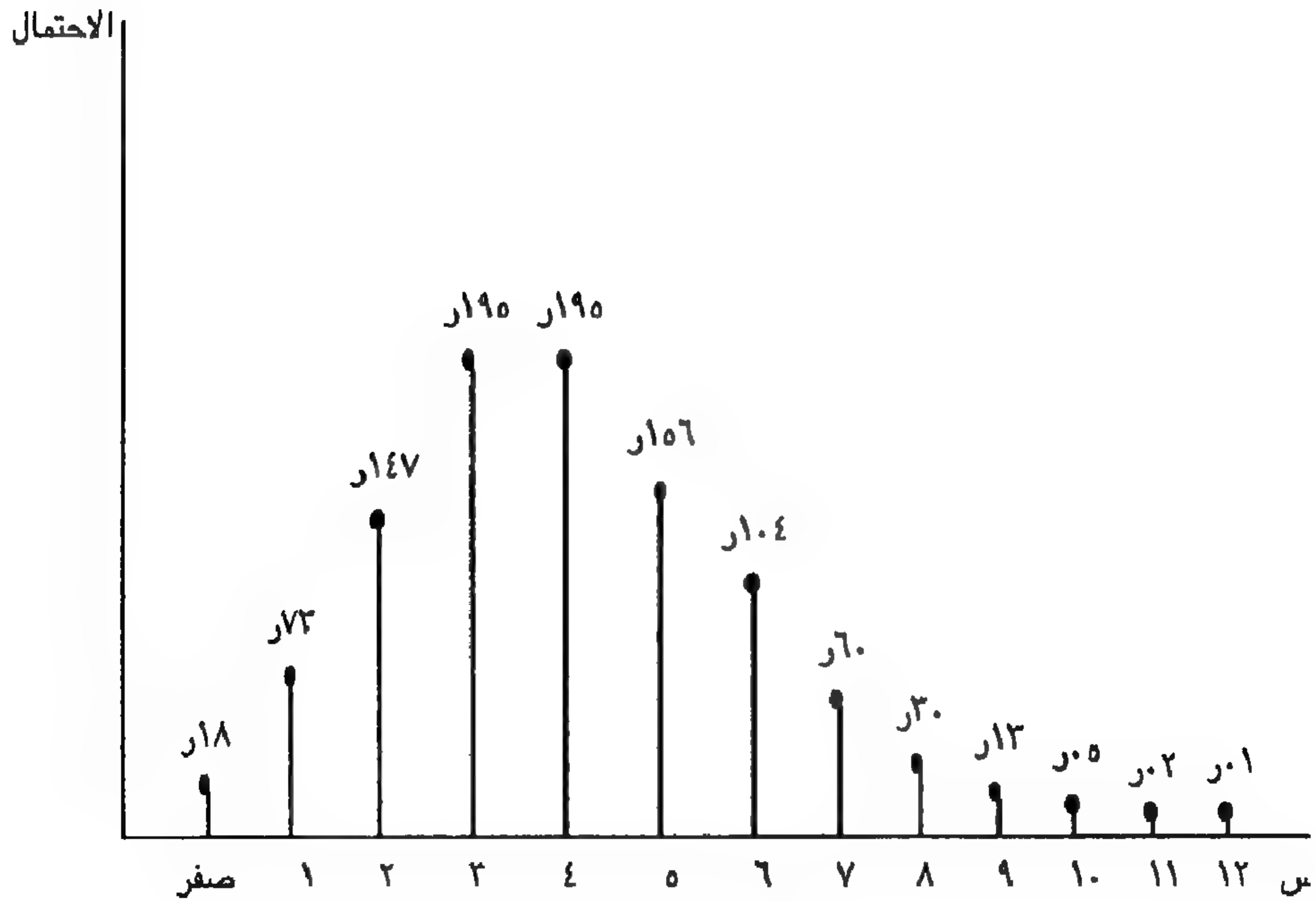
ملاحظة: توزيع بواسون من التوزيعات الملتوية جهة اليمين ويتوقف شكل المنحنى الممثل

لدالة كثافة الإحتمال على قيمة μ وكلما زادت قيمتها كلما إقترب التوزيع من التماثل

ويتضح ذلك من الأشكال التالية:



شكل رقم ١ دالة كثافة الاحتمال عند $\mu = \frac{1}{2}$

شكل رقم ٢ دالة كثافة الاحتمال عند $\mu = 1$ شكل رقم ٣ دالة كثافة الاحتمال عند $\mu = 4$

أسئلة على الوحدة الدراسية السادسة

١- فيما يلي بيان عن نتائج فرع السطو خلال عام ١٩٩١ بإحدى شركات التأمين المصرية:

عدد الوثائق	عدد الخسائر
٨٤٤١	صفر
٥٣١	١
٢٥	٢
٣	٣
صفر	٤
٩٠٠٠	المجموع

فإذا علمت أن توزيع عدد الوثائق قريب جداً من التوزيع البواسوني فاحسب:

- إحتمال حدوث خسارة واحدة خلال العام للوثيقة الواحدة.
 - إحتمال حدوث ٣ خسائر خلال العام للوثيقة الواحدة.
 - إحتمال حدوث خسارتين على الأقل خلال العام للوثيقة الواحدة.
 - عدد الوثائق التي ينتج عنها حادثين خلال عام ١٩٩٢ إذا كان عدد الوثائق المتوقع خلال عام ١٩٩٢ هو ١٤٠٠٠ وثيقة.
- ٢- إذا علمت أن عدد الحوادث في فرع الحريق يتبع توزيع بواسون بمتوسط ٠.٦ فاحسب:
- إحتمال حدوث حادثين خلال السنة.
 - إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال السنة.
 - إحتمال عدم حدوث أى حادث خلال السنة.
 - عدد الوثائق التي ينتج عنها ٣ حوادث إذا كان عدد الوثائق المتوقع خلال العام القادم هو ٣٠٠٠٠ وثيقة.

الوحدة الدراسية السابعة
توزيع ذى الحدين السالب
كتوزيع مناسب لعدد الحوادث

الوحدة الدراسية السابعة

موضوعها:

توزيع ذى الحدين السالب كتوزيع مناسب لعدد الحوادث.

هدفها:

تعريف الطالب بكيفية استخدام توزيع ذى الحدين السالب كتوزيع مناسب لعدد الحوادث.

عناصرها:

- خصائص توزيع ذى الحدين السالب.

توزيع ذى الحدين السالب: Negative binomial Distribution

عند دراستنا لتوزيع ذى الحدين كنا أمام عدد ثابت من المحاولات (عدد مرات إجراء التجربة أو عدد الوحدات المنتجة) وهو ما رمزنا له بالرمز s وكنا نهتم بعدد مرات النجاح ورمزنا لها بالرمز r .

وبالنسبة لتوزيع ذى الحدين السالب فإنه يشابه توزيع ذى الحدين فيما عدا أنه يتم التركيز على عدد المحاولات (وليس عدد مرات النجاح) المطلوبة للحصول على عدد ثابت من حالات النجاح، وبمعنى آخر فإنه في ظل توزيع ذى الحدين يكون عدد المحاولات ثابت وعدد حالات النجاح هو المتغير أما في ظل توزيع ذى الحدين السالب فإن عدد حالات النجاح هو الثابت ويكون المتغير هو عدد مرات إجراء التجربة أو عدد المحاولات أى يمثل المتغير العشوائى ونظل نكرر التجربة حتى نحصل على العدد اللازم والثابت لحالات النجاح ويكون المطلوب هو تحديد هذا العدد من المحاولات حيث تنتهى التجربة بالحصول على عدد حالات النجاح المطلوبة وبالتالي فإن عدد مرات التجربة أو عدد المحاولات يمثل المتغير العشوائى ويرمز له بالرمز s حيث $s = r, r+1, r+2, \dots$

وللوصول إلى دالة كثافة الاحتمال عندما يأخذ عدد المحاولات وهو s القيم $r, r+1, r+2, \dots$ وأيضا عندما يكون عدد حالات الفشل s والتي تأخذ القيم صفر، ١، ٢، ... فإن هذا يعنى أن عدد مرات التجربة وهو $s = (r+s)$ لأن المطلوب هو الحصول على عدد حالات من النجاح r باحتمال p^r وبالتالي فإن آخر محاولة لابد أن تكون نجاح وهذا يحدث باحتمال $(1-p)$ وأن المحاولات الأخرى السابقة للمحاولة الأخيرة عددها $(s-r-1)$ وتحتوى على $(1-p)^{s-r-1}$ حالات نجاح، s حالات فشل وهذا يحدث باحتمال:

$$P(s) = \binom{s-1}{r-1} p^r (1-p)^{s-r} \quad , s = r, r+1, r+2, \dots$$

وحيث أن المحاولات مستقلة فإن المحاولات السابقة كلها وقبل الحصول على حالة النجاح الأخيرة بالإضافة إلى المحاولة الأخيرة الناجحة تمثلها دالة كثافة احتمال عبارة عن حاصل ضرب الدالتين.

$$\text{أي } K(s) = \binom{s+r-1}{r-1} (1-r)^{s+r-1} (1-r)^{1-r} \times L$$

$$\therefore K(s) = \binom{s+r-1}{r-1} (1-r)^{s+r-1} (1-r)^{1-r} \times L, \quad s = \text{صفر، ١، ٢، ...}$$

$$\text{وحيث أن } \binom{n}{s} = \binom{n}{n-s}$$

$$\therefore \binom{s+r-1}{s} = \binom{s+r-1}{r-1}$$

وبالتالى فإن الدالة تصبح كما يلى:

$$K(s) = \binom{s+r-1}{r-1} (1-r)^{s+r-1} (1-r)^{1-r} \times L$$

وتسمى الدالة السابقة بتوزيع ذى الحدين السالب لأنها عبارة عن مفكوك الدالة :

$$\binom{s+r-1}{r-1} (1-r)^{s+r-1} (1-r)^{1-r} \times L = \binom{s+r-1}{r-1} (1-r)^{s+r-1} (1-r)^{1-r} \times L$$

حيث r ، L هما معلمتا التوزيع، s هي متغير عشوائى يأخذ القيم الصحيحة:

أى أن $s = \text{صفر، ١، ٢، ٣، ... إلى } \infty$

$$\mu = \frac{r(1-r)}{1-r} = r$$

$$\sigma^2 = \frac{r(1-r)}{1-r} = r$$

والمثال التالى يوضح كيفية تطبيق واستخدام هذا التوزيع فى الحياة العملية وبصفة

خاصة فى تقدير الاحتمالات وعدد الحوادث بالنسبة لشركات التأمين.

مثال:

إذا علمت أن عدد الحوادث فى فرع تأمين السيارات يتبع توزيع ذى الحدين السالب

بمتوسط ٠.٦٥ وتباين ٠.٦٧ وأن عدد الوثائق فى هذا الفرع قد بلغ ١٨٧٠.٨ وثيقة وذلك

خلال عام ١٩٩٠.

إحسب:

أ- إحتمال عدم حدوث أى حادث خلال العام.

ب- إحتمال حدوث حادث واحد خلال العام.

ج- إحتمال حدوث حادثين خلال العام.

د- إحتمال حدوث ٣ حوادث خلال العام.

هـ- إحتمال حدوث ٤ حوادث خلال العام.

و- إحتمال حدوث حادثين على الأقل.

ز- عدد الوثائق التى ينتج عنها حادثين.

ح- عدد الوثائق التى لا ينتج عنها أى حادث.

الحل:

$$\therefore \frac{r(L-1)}{L} = \text{المتوسط}$$

$$\frac{r(L-1)}{L} = \text{التباين}$$

وبالتعويض عن المتوسط والتباين بقيمتيهما ينتج أن.

$$\frac{r(L-1)}{L} = 0.65$$

$$\frac{r(L-1)}{L} = 0.67$$

وبقسمة المعادلة الأولى على المعادلة الثانية:

$$\frac{\frac{r(L-1)}{L}}{\frac{r(L-1)}{L}} = \frac{0.65}{0.67}$$

$$\therefore L = 97.149$$

وبالتعويض بقيمة ل فى المعادلة الأولى:

$$\frac{r(97.149-1)}{97.149} = 0.65$$

$$0.63059685 = r \times 0.29851$$

$$\therefore r = \frac{0.63059685}{0.29851}$$

$$= 2.11248$$

∴ دالة ذى الحدين السالب تأخذ الشكل الآتى:

$$K(s) = \frac{s + 2.11248}{s} \times 97.149 \times 0.29851 \times s$$

وحيث أن قيمة ر بها كسور فإنه يصعب إستخدام المعادلة بصورتها الحالية إلا أنه توجد علاقة هامة يمكن من خلالها الحصول على الإحتمالات المختلفة وذلك سواء كانت قيمة ر كسراً أو عدداً صحيحاً وهى:

$$K(\text{صفر}) = L$$

$$K(1) = \frac{K(\text{صفر}) \times L \times (L-1)}{1}$$

$$K(2) = \frac{K(1) \times (1+L) \times (L-1)}{2}$$

$$K(3) = \frac{K(2) \times (2+L) \times (L-1)}{3}$$

$$K(s) = \frac{K(s-1) \times (1-s+L) \times (L-1)}{s}$$

وبالتعويض بقيمتى ر ، ل السابق الحصول عليهما ينتج أن:

$$K(\text{صفر}) = 97.149 \times 2.11248 = 937986$$

$$K(1) = 937986 \times 2.11248 \times 0.29851$$

$$= 59149$$

$$\frac{0.29851 \times 311248 \times 0.09149}{2} = (2) \leq$$

$$= 0.02748$$

$$\frac{0.29851 \times 411248 \times 0.02748}{3} = (3) \leq$$

$$= 0.00112$$

$$\frac{0.29851 \times 511248 \times 0.00112}{4} = (4) \leq$$

$$= 0.00004$$

أ - احتمال عدم حدوث أى حادث = 937986

ب- وإ احتمال حدوث حادث واحد = 0.09149

ج- وإ احتمال حدوث حادثين = 0.02748

د- وإ احتمال حدوث 3 حوادث = 0.00112

هـ- وإ احتمال حدوث 4 حوادث = 0.00004

و- احتمال حدوث حادثين على الأقل = احتمال حدوث حادثين + احتمال حدوث 3 حوادث

+ احتمال حدوث 4 حوادث +

إلى احتمال حدوث ∞ من الحوادث

= 1 - [احتمال حدوث حادث واحد + احتمال عدم حدوث
أى حادث]

$$= 1 - [0.09149 + 937986]$$

$$= 1 - 997135 = 0.02865$$

ز- عدد الوثائق التى ينتج عنها حادثين = احتمال حدوث حادثين \times عدد الوثائق كلها

$$= 0.02748 \times 187.8 = 51 \text{ وثيقة}$$

ح- عدد الوثائق التي لا ينتج عنها أى حادث = إحتمال عدم حدوث أى حادث \times عدد الوثائق كلها

$$= 937986 \times 1870.8$$

$$= 17548 \text{ وثيقة}$$

مثال ٢: إذا علمت أن عدد الحوادث فى فرع السطوب بشركة مصر للتأمين يتبع توزيع ذى الحدين السالب ويدراسة عدد الوثائق حسب عدد الحوادث خلال العام السابق ١٩٩٢ حصلنا على البيانات التالية:

عدد الوثائق	عدد الحوادث
١٧٥٤٩	صفر
١١٠٤	١
٥٣	٢
٢	٣
صفر	٤
١٨٧٠.٨	المجموع

فاحسب الإحتمالات الآتية: أ- إحتمال حدوث حادثين فقط خلال العام.

ب- إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال العام.

ج- إحتمال حدوث حادثين على الأكثر خلال العام.

د- عدد الوثائق التى تتعرض لحادثين خلال العام القادم ١٩٩٣ إذا كان عدد الوثائق المتوقع هو ٢٠٠٠٠ وثيقة.

الحل:

يتم أولاً حساب متوسط وتباين توزيع عدد الحوادث حتى يمكن إستخدامهما فى إيجاد قيمتى μ ، σ (معلمتى التوزيع) وبعد ذلك يتم حساب الإحتمالات المختلفة وذلك على النحو التالى:

عدد الحوادث	عدد الوثائق	عدد الحوادث \times عدد الوثائق	عدد الوثائق \times عدد الحوادث \times عدد الوثائق
س	ك	س \times ك	س \times ك
صفر	١٧٥٤٩	صفر	صفر
١	١١٠٤	١١٠٤	١١٠٤
٢	٥٢	١٠٦	٢١٢
٣	٢	٦	١٨
٤	صفر	صفر	صفر
المجموع	١٨٧٠٨	١٢١٦	١٣٣٤

$$\bar{s} = \frac{\text{مجموع س ك}}{\text{مجموع ك}}$$

$$\therefore \bar{s} = \frac{1216}{1870.8} = 0.65$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\text{مجموع س ك}^2 - \frac{(\text{مجموع س ك})^2}{\text{مجموع ك}}}{\text{مجموع ك} - 1}$$

$$= \frac{\frac{2(1216)}{1870.8} - 1334}{1870.7} = 0.671$$

وبمساواة المتوسط والتباين الفعلين بالمتوسط والتباين النظريين ينتج أن:

$$(1) \quad \frac{(J-1)r}{J} = 0.65$$

$$(2) \quad \frac{(J-1)r}{2J} = 0.671$$

وبقسمة المعادلة (١) على المعادلة (٢) ينتج أن:

$$\frac{{}_2J}{(J-1)R} \times \frac{R(J-1)}{J} = \frac{\overline{s}}{{}_2E}$$

$$J = \frac{0.65}{0.671}$$

$$\therefore J = 9689$$

وبالتعويض فى معادلة (١) بقيمة ل ينتج أن:

$$\frac{(9689 - 1) \times R}{9689} = 0.65$$

$$\therefore R = 0.25$$

وبالتعويض بقيمتى R ، ل فى المعادلات الخاصة بحساب الإحتمالات المختلفة نحصل

على ما يلى:

$${}_0K = (\text{صفر}) = J$$

$$= 9689 \times 0.25 = 2422.25$$

$${}_1K = (1) = R \times (\text{صفر}) = (J-1)$$

$$= 9689 \times 0.25 \times 2422.25 = 59070.5$$

$${}_2K = \frac{(1)K \times (1+R)(J-1)}{2} =$$

$$= \frac{59070.5 \times 3 \times 0.25 \times 2422.25}{2} = 2779.0$$

$${}_3K = \frac{(2)K \times (2+R)(J-1)}{3} =$$

$$= \frac{2779.0 \times 4 \times 0.25 \times 2422.25}{3} = 117.0$$

أ- إحتمال حدوث حادثين فقط خلال العام $= ٠.٢٧٧٩$

ب- إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال العام $= ٠.٢٧٧٩ + ٠.٠١١٧ = ٠.٢٨٩٦$

ج- إحتمال حدوث حادثين على الأكثر خلال العام $= ٩٨.٢٦ + ٥٩.٧٥ + ٠.٢٧٧٩$

$$= ١ - ٠.٠١١٧ = ٩٩.٨٨٣$$

د- عدد الوثائق التي تتعرض لحادثين خلال العام القادم إذا كان عدد الوثائق المتوقع

٢٠٠٠ وثيقة

$=$ إحتمال حدوث حادثين \times عدد الوثائق

$$= ٠.٢٧٧٩ \times ٢٠٠٠ = ٥٦ \text{ وثيقة}$$

أسئلة على الوحدة الدراسية السابعة

١- إذا علمت أن عدد الحوادث في فرع الحريق يتبع توزيع ذي الحدين السالب فإذا كانت النتائج خلال العام السابق كما يلي:

عدد الوثائق	عدد الحوادث
٨٤٠٠	صفر
٧٨٧	١
٧٥	٢
٦	٣
٢	٤

إحسب الإحتمالات الآتية: أ- عدم حدوث أى حادث خلال العام.

ب- حدوث حادثين فقط خلال العام.

ج- حدوث حادثين على الأقل خلال العام.

٢- إذا علمت أن عدد الحوادث في فرع الحريق يتبع توزيع ذي الحدين السالب بمتوسط ٠.٧ ر وتباين ٠.٧٣ ر فاحسب:

أ- إحتمال حدوث حادثين فقط خلال العام.

ب- إحتمال حدوث حادثين على الأقل خلال العام.

ج- إحتمال عدم حدوث أى حادث خلال العام

د- عدد الوثائق التى ينتج عنها ٣ حوادث خلال العام القادم إذا كان عدد الوثائق المتوقع هو ٣٠٠٠٠ وثيقة.

الوحدة الدراسية الثامنة
التوزيع الطبيعي

الوحدة الدراسية الثامنة

موضوعها: التوزيع الطبيعي

هدفها: تعريف الدارس بكيفية استخدام التوزيع الطبيعي في حساب الاحتمالات المختلفة وخاصة ما يتعلق بمبالغ التأمين .

عناصرها: - خصائص التوزيع الطبيعي

- خصائص التوزيع الطبيعي المعياري

- نظرية النزعة المركزية

التوزيع الطبيعي: Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة أن لم يكن أهمها على الإطلاق ذلك لأن العديد من الظواهر كالأطوال والأوزان تخضع لهذا التوزيع ، كما أن معظم التوزيعات تؤول الى التوزيع الطبيعي عندما يزيد حجم العينة ، كما أن العديد من الاختبارات الاحصائية تعتمد عليه (إختبارات الفروض الإحصائية وإنشاء فترات الثقة) بالإضافة إلى أهميته في علم العينات.

وهو توزيع متماثل تماماً بمعنى أنه إذا أسقطنا عموداً من قمته فإنه يقسم دالة كثافة الاحتمال إلى نصفين متطابقين تماماً ، وتأخذ دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad - \quad \alpha < x < \alpha$$

حيث $\mu = 3.1428$ ، $\sigma = 2.71828$

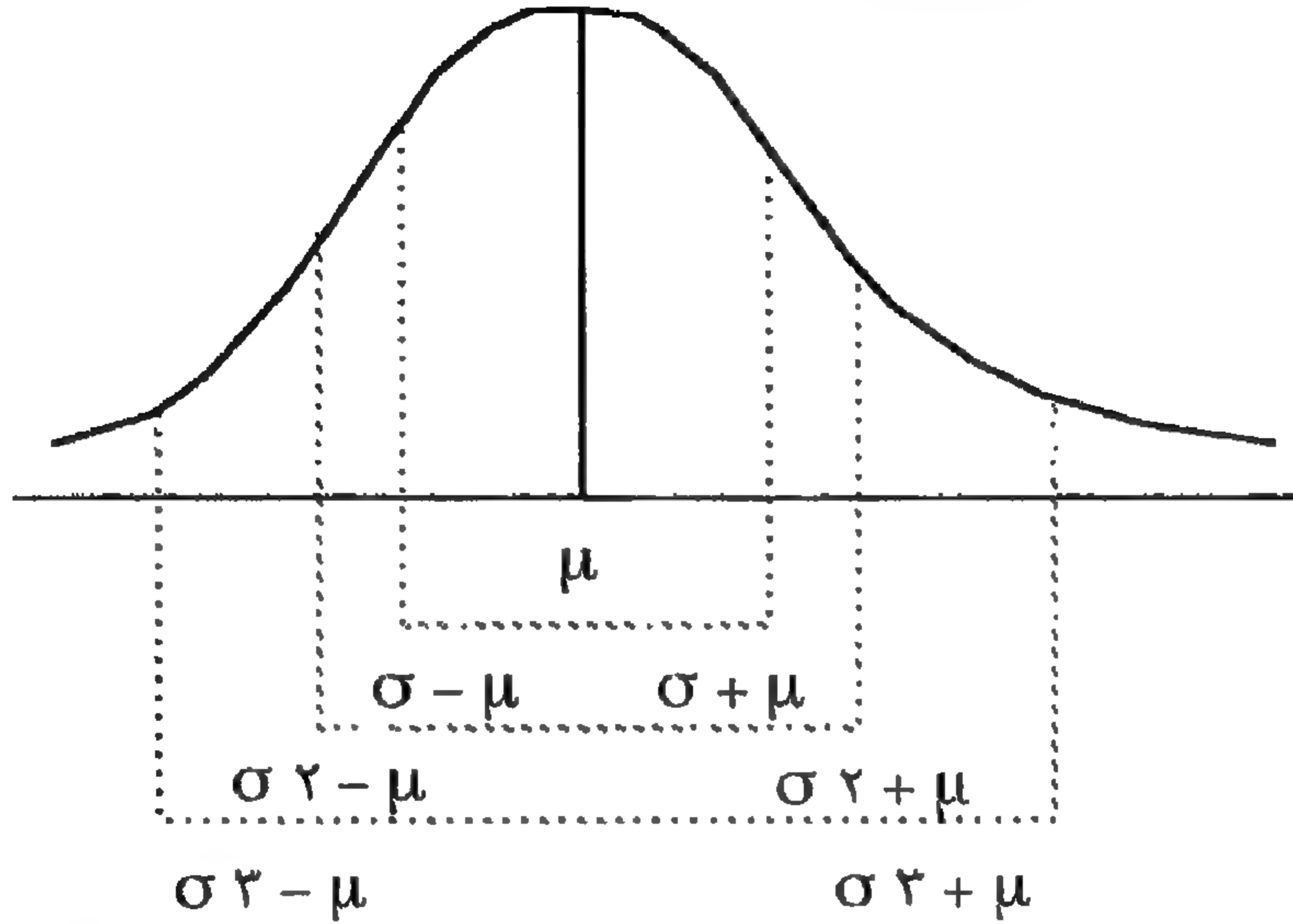
ويعتمد هذا التوزيع على معلمتين هما μ ، σ أي المتوسط والانحراف المعياري على التوالي فالأول مقياس للموضع والثاني مقياس للتشتت

خصائص التوزيع الطبيعي : للتوزيع الطبيعي مجموعة من الخصائص من أهمها:

- ١- المنحنى متماثل حول الوسط الحسابي أي عند $x = \mu$
- ٢- يصل المنحنى إلى قمته (نهايته العظمى) عندما $x = \mu$
- ٣- الوسط والوسيط والمنوال لهذا التوزيع قيمتها متساوية
- ٤- المساحة تحت المنحنى تساوى واحد صحيح أي أن قيمة تكامل دالة كثافة الاحتمال من $-\infty$ إلى $+\infty$ تساوى واحد صحيح.
- ٥- المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين: $x = \mu - \sigma$ ، $x = \mu + \sigma$ تساوى ٦٨.٢٧٪ من المساحة تحت المنحنى أي أن ٦٨.٢٧٪ من قيم المتغير العشوائي تقع داخل هذه

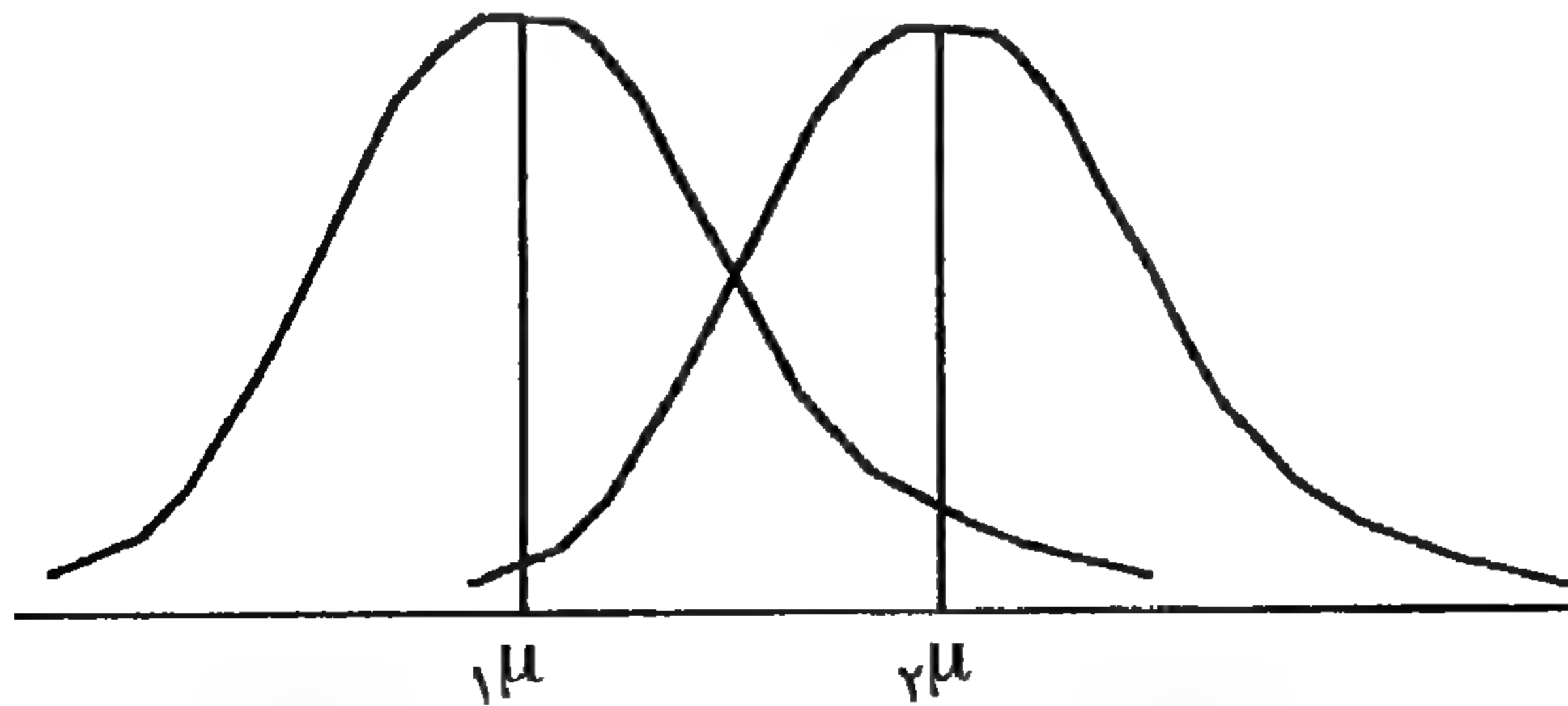
الفترة ، والمحصورة بين $\sigma^2 - \mu = س$ ، $\sigma^2 + \mu = س$ ، تساوى ٤٥ر٩٥٪ من المساحة تحت المنحنى ، وأخيرا فإن ٧٣ر٩٩٪ من المساحة تحت المنحنى تقع بين $\sigma^2 - \mu = س$ ، $\sigma^2 + \mu = س$

وذلك كما هو موضح بالشكل التالى:



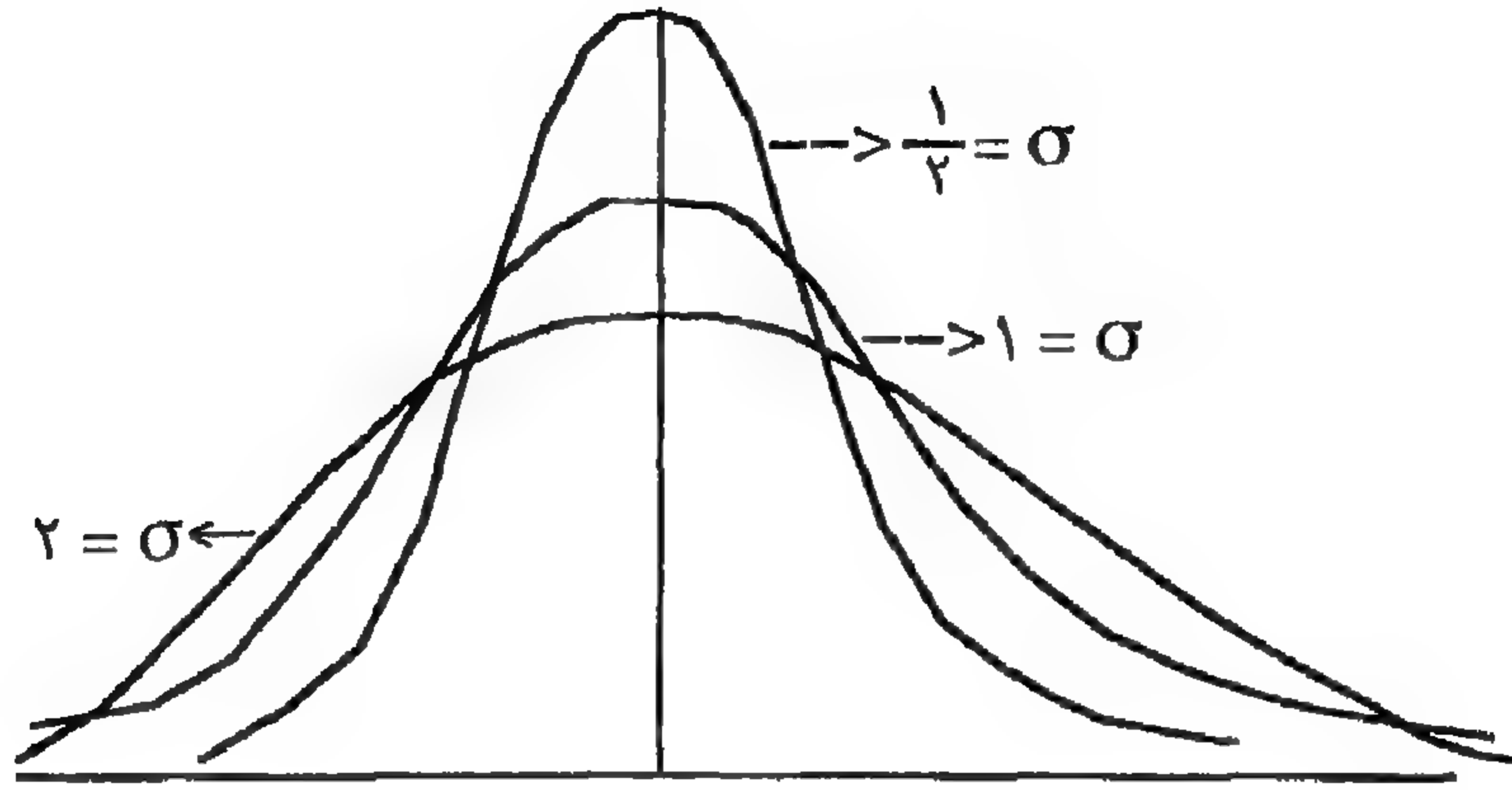
شكل رقم ١ دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى

٦- كما سبق أن ذكرنا فإن دالة التوزيع الطبيعى دالة فى μ ، σ ولذلك فإنه بتغير قيمتهما فإننا نحصل على منحنيات مختلفة، فإذا تغيرت قيمة μ فإن مكان المنحنى ينتقل الى اليمين اذا كانت $\mu_1 < \mu_2$ والعكس صحيح ويمكن توضيح ذلك بالشكل التالى:



شكل رقم ٢ دالتى كثافة الاحتمال لتوزيعين طبيعيين يختلفان فى قيمة μ

وهذان المنحنيان لهما نفس الانحراف المعياري وبالتالي فهما متطابقان من حيث الشكل أما إذا تغيرت σ فإن شكل المنحنى يتغير لأنها تتحكم فى تشتت التوزيع من حيث التفرطح أو التدبيب وذلك كما فى الشكل التالى:



شكل رقم ٣ دوال كثافة الاحتمال لتوزيعات طبيعية تختلف فى قيمة σ

ويتضح من الشكل السابق أنه كلما زاد الانحراف المعياري كلما كان المنحنى مفرطحاً (أى أكثر تشتتاً) وكلما نقص الانحراف المعياري كلما كان المنحنى مدبباً (أى أكثر تركزاً).

وفى حالة أن يكون الانحراف المعياري مساوياً للصفر فإن هذا يعنى أن جميع القيم متساوية أى أننا نتعامل مع ثابت وبالتالي فلا يوجد توزيع إحصائى.

٦- معامل الالتواء لهذا التوزيع يساوى صفر لأنه متماثل تماماً كما أن معامل التفرطح يساوى ٣.

٧- توجد نقطتا إنقلاب عند $\sigma + \mu = س$ ، $\sigma - \mu = س$

٨- إذا عوضنا فى دالة كثافة الاحتمال عن س بقيم مختلفة فإننا نحصل على إرتفاع العمود المقام عند هذه النقطة (الاحداثى الرأسى) ومن خصائص التوزيع الطبيعى أن العمود المقام عند $\sigma \pm \mu = س$ إرتفاعه $= ٦.٠٦٥ \%$ من إرتفاع العمود المقام عند μ أى أن: إرتفاع العمود عند $\mu + \sigma = س$ = إرتفاع العمود عند $\mu - \sigma = س$ من ٦.٠٦٥%

ارتفاع العمود عند μ ($\frac{24197}{39894} = 0.6065$)، وأيضاً العمود المقام عند

$$\mu \pm \sigma = \frac{0.5399}{39894} = 0.001353 \text{ من إرتفاع العمود المقام عند الوسط الحسابى } \mu$$

أخيراً فإن إرتفاع العمود المقام عند $\mu \pm \sigma = \frac{0.0443}{39894} = 0.00111$ من إرتفاع العمود

المقام عند μ

وهذا وتأخذ دالة التوزيع Distribution function أو الدالة التراكمية أو التجميعية

Cumulative Function (وهى الدالة التى تعطى إحتمال أن المتغير العشوائى يساوى أو

يقبل عن قيمة معينة) الشكل التالى:

$$D(s) = \int_{-\infty}^s \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds, \quad -\infty < s < \infty$$

وهذه الدالة يصعب تكاملها بالطرق العادية لذلك فقد تم التفكير فى إعداد جداول لهذا

التكامل إلا أنه إتضح وجود مشكلة تتمثل فى أننا نحتاج إلى عدد لا نهائى من الجداول نظراً

لتغير قيمة التكامل ليس فقط بتغير قيمة s ولكن بتغير قيمتى μ , σ إلا أنه أمكن التغلب

على هذه المشكلة من خلال ربط قيم المتغير s فى التوزيع الطبيعى العادى بقيم المتغير y

وهو متغير يتبع التوزيع الطبيعى المعيارى متوسطه يساوى صفر وإنحرافه المعيارى يساوى

واحد صحيح حيث يتم تحويل قيم المتغير s التى تتبع التوزيع الطبيعى العادى إلى y التى

$$\text{تتبع التوزيع الطبيعى المعيارى من خلال العلاقة: } y = \frac{s - \mu}{\sigma}$$

وتفيد هذه العلاقة فى تحويل المتغيرات التى تتوزع توزيعاً طبيعياً وبغض النظر عن

قيم معلمتيها (σ, μ) إلى متغير جديد يتوزع توزيعاً طبيعياً معيارياً متوسطه يساوى صفر ،

وإنحرافه يساوى واحد صحيح ولذلك فإن دالة كثافة الاحتمال لا يكون بها ثوابت مجهولة

وأمكن حساب تكامل دالة كثافة الاحتمال للمتغير المعيارى y والتى تأخذ الشكل التالى:

$$D(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad -\infty < y < \infty$$

وتم عمل جداول تعرف بجداول التوزيع الطبيعى المعيارى والتي تستخدم فى حساب الاحتمالات المختلفة (المساحة تحت المنحنى والتي عندها المتغير يساوى أو يقل عن قيمة معينة) وأيضا تستخدم فى حساب إرتفاع العمود المقام عند نقطة معينة.

خصائص التوزيع الطبيعى المعيارى:

هناك مجموعة من الخصائص للتوزيع الطبيعى المعيارى من أهمها:

- ١- متوسط التوزيع يساوى صفر وانحرافه المعيارى يساوى واحد صحيح.
- ٢- المساحة تحت المنحنى تساوى واحد صحيح لذلك تستخدم فى حساب الاحتمالات.
- ٣- المنحنى متماثل حول الصفر والتوائه يساوى صفر وتفريطه يساوى ٣
- ٤- إرتفاع العمود المقام عند أى نقطة (σ أو σ^2 أو σ^3 أو أى قيم أخرى) تربطه بالعمود المقام عند الصفر نفس العلاقة السابق ذكرها بالنسبة للتوزيع الطبيعى.
- ٥- المساحة تحت المنحنى مقسمة الى قسمين حول المتوسط تقسيما متماثلا كما فى التوزيع الطبيعى بحيث أن:

المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين $\sigma \pm \mu$ تساوى ٦٨.٢٧٪

المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين $\sigma \pm \mu$ تساوى ٩٥.٤٥٪

المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين $\sigma \pm \mu$ تساوى ٩٩.٧٣٪

وطالما أن التوزيع متماثل فإنه يمكن حساب الاحتمالات الخاصة بالقيم السالبة أى التى تقع على يسار الوسط الحسابى ولذلك فإن هناك جداول تحسب الاحتمالات من $s < -\infty$ وحتى s تساوى أى قيمة موجبة وهناك جداول أخرى تحسب الاحتمالات من $s =$ صفر وحتى s تساوى أى قيمة موجبة استنادا الى فكرة التماثل وإلى أن المساحة تحت المنحنى من $-\infty > s \geq$ صفر تساوى ٥٠٪ كما أن المساحة تحت المنحنى من صفر $\geq s > \infty$ تساوى ٥٠٪ أيضا.

نظرية (١)

إذا كان لدينا المتغيرات المستقلة : $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ وكانت

تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسطات : $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ ولها

التباينات : $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots, \sigma_n^2$:

فإن المتغير العشوائى $v = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$ سوف

يتوزع توزيعاً طبيعياً أيضاً بمتوسط يساوى $\mu \times n$ (أى مجموع

المتوسطات) وتباين يساوى $\sigma^2 \times n$ (أى مجموع التباينات). أى أن :

$$y = \frac{v - \mu \times n}{\sqrt{\sigma^2 \times n}} \text{ تتوزع توزيعاً طبيعياً معيارياً أيضاً}$$

نظرية النزعة المركزية: Central Limit Theorem

تعتبر هذه النظرية من النظريات الهامة فى الإحصاء حيث أننا فى النظرية السابقة

علمنا أنه إذا كان لدينا المتغيرات المستقلة: $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ والتي تتوزع توزيعاً

طبيعياً فإن المتغير العشوائى $v = \sum_{i=1}^n s_i$ سوف يتوزع أيضاً توزيعاً طبيعياً بمتوسط

يساوى مجموع متوسطات المتغيرات العشوائية $(\mu \times n)$ وتباين يساوى مجموع التباينات

$(\sigma^2 \times n)$ ولكن ما هو الحل إذا لم تكن المتغيرات تتوزع أصلاً توزيعاً طبيعياً ؟

فى هذه الحالة فإنه قد تم إثبات أن المتغير v يتوزع أيضاً توزيعاً طبيعياً وبغض

النظر عن التوزيع الأسمى لقيم s_i ولكن فى حالة زيادة n (حجم العينة) بدرجة كافية وتم

الاتفاق على أن $n > 30$ تعتبر كافية ، أى أن: $y = \frac{v - \mu \times n}{\sqrt{\sigma^2 \times n}}$ تتوزع توزيعاً طبيعياً معيارياً وذلك فى حالة زيادة n بدرجة كبيرة.

وهناك صيغة أخرى للنظرية اذا كان المتغير العشوائى هو متوسطات بمعنى أنه:

اذا كان لدينا المتغير العشوائى s والذي يتوزع أولا يتوزع توزيعا طبيعيا متصلا كان أو منفصلا متماثلا أو غير متماثلا ، متوسط μ وتباينة σ^2 اذا سحبنا عدة عينات من الحجم n ويغض النظر عن توزيع المجتمع الاصلى المحسوبة منه هذه العينات فإن متوسط هذه العينات يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ أى أن:

$$y = \frac{\frac{\mu - \bar{s}}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1-n}{n-1}}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{تتوزع توزيعا طبيعيا معياريا وذلك اذا كان السحب بإرجاع و ايضا}$$

$$\text{يتوزع توزيعا طبيعيا بمتوسط } \mu \text{ وتباين } \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{1-n}{n-1} \text{ أى أن:}$$

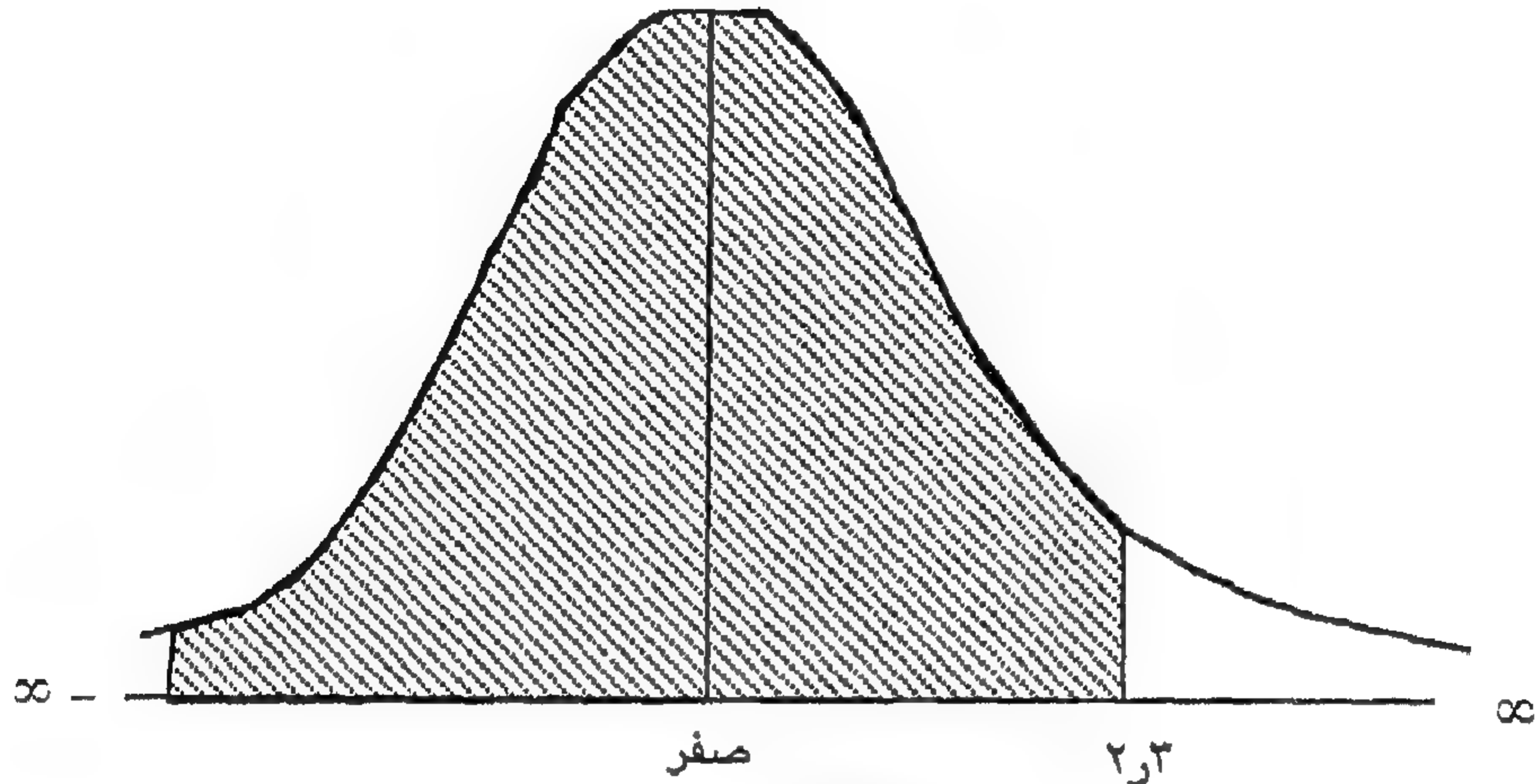
$$y = \frac{s - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \times \frac{1-n}{n-1}}} \quad \text{فى حالة عدم الارجاع}$$

حيث n حجم المجتمع، n حجم العينة، والمقدار $\sqrt{\frac{1-n}{n-1}}$ يسمى معامل التصحيح Correction factor وهو يستخدم اذا كان حجم العينة أكبر من ٥٪ من حجم المجتمع أما إذا كان حجم العينة فى حدود ٥٪ فلا فرق بين السحب بإرجاع والسحب بدون إرجاع والأمثلة التالية توضح كيفية الاستفادة من هذا التوزيع

مثال:

- أوجد المساحة المحصورة بين α ، z_{α} تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .
- أوجد المساحة المحصورة بين صفر ، z_{α} تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .
- أوجد المساحة المحصورة بين z_{α} ، α تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .
- أوجد المساحة المحصورة بين α ، $-z_{\alpha}$ تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .
- أوجد المساحة المحصورة بين z_{α} ، z_{α} تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .
- أوجد المساحة المحصورة بين z_{α} ، z_{α} تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .
- أوجد المساحة المحصورة بين z_{α} ، z_{α} تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

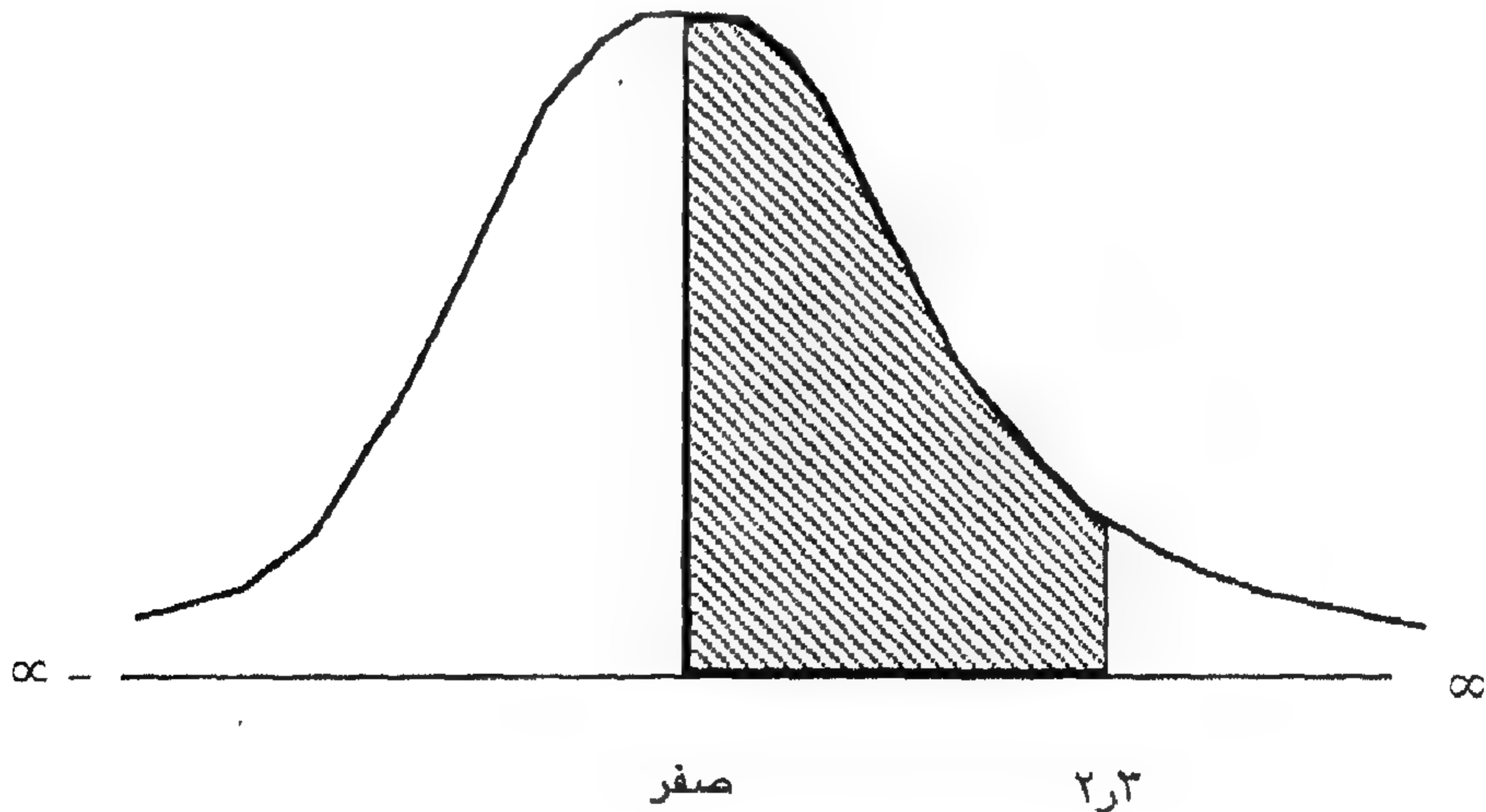
الحل:

أ- المساحة المحصورة بين $-\infty$ ، $٢ر٣$ يمكن توضيحها كما يلي:

شكل رقم ٤

المساحة المطلوبة هي $ح (-\infty < ي < ٢ر٣)$ وهي $ح (ي < ٢ر٣)$

$$= ٩٨٩٢٨ر$$

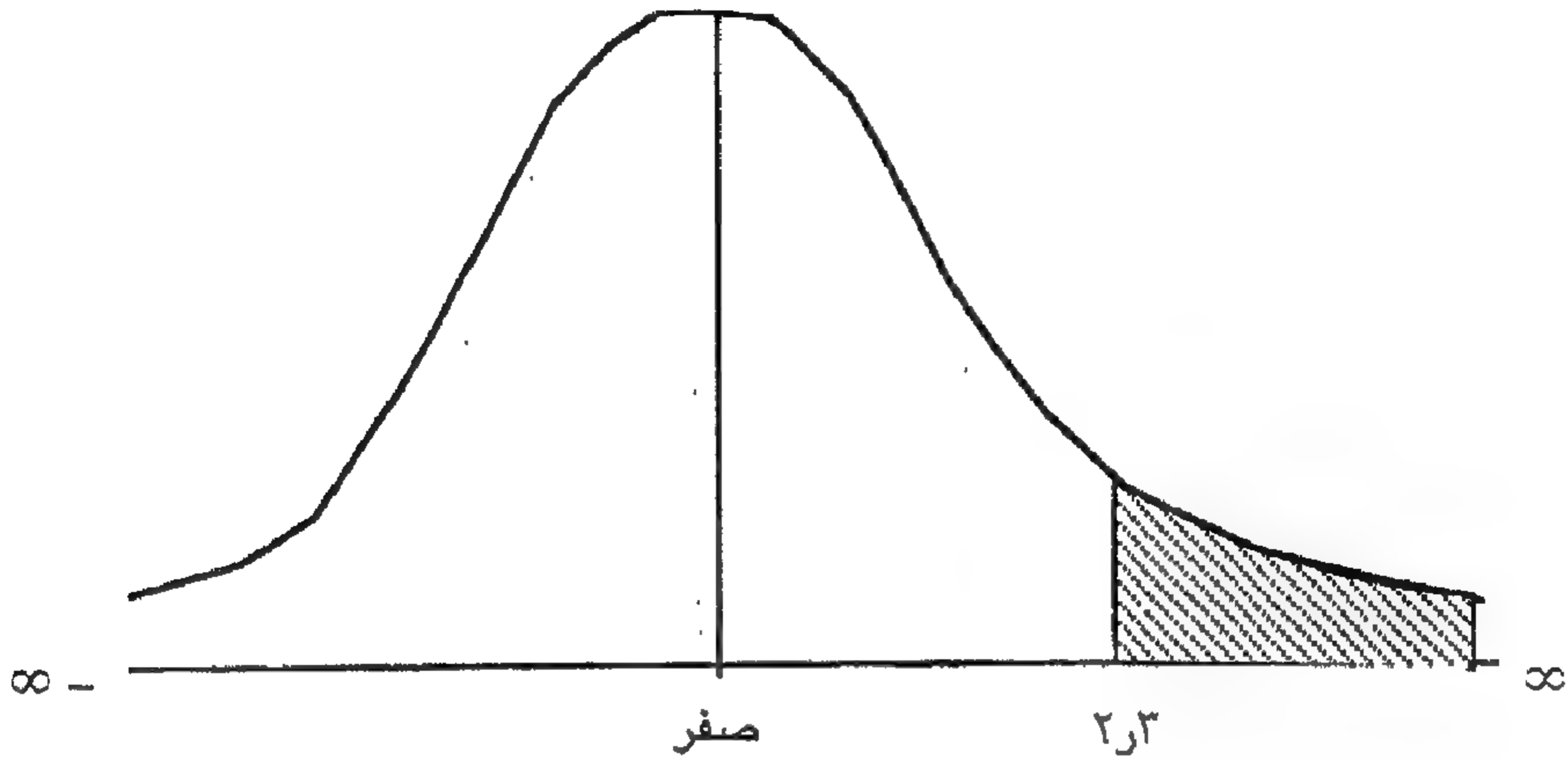
ب- المساحة المحصورة بين صفر ، $٢ر٣$ يمكن توضيحها كما يلي:

شكل رقم ٥

∴ المساحة المطلوبة هي $ح (صفر < ي < ٢ر٣) = ح (ي < ٢ر٣) - ح (ي = صفر)$

$$.٤٨٩٢٨ = .٥ - .٩٨٩٢٨ =$$

ج - المساحة المحصورة بين $٢ر٣$ ، α يمكن توضيحها كما يلي:



شكل رقم ٦

وحيث أن المساحة المطلوبة هي ح ($٢ر٣ < \alpha$)

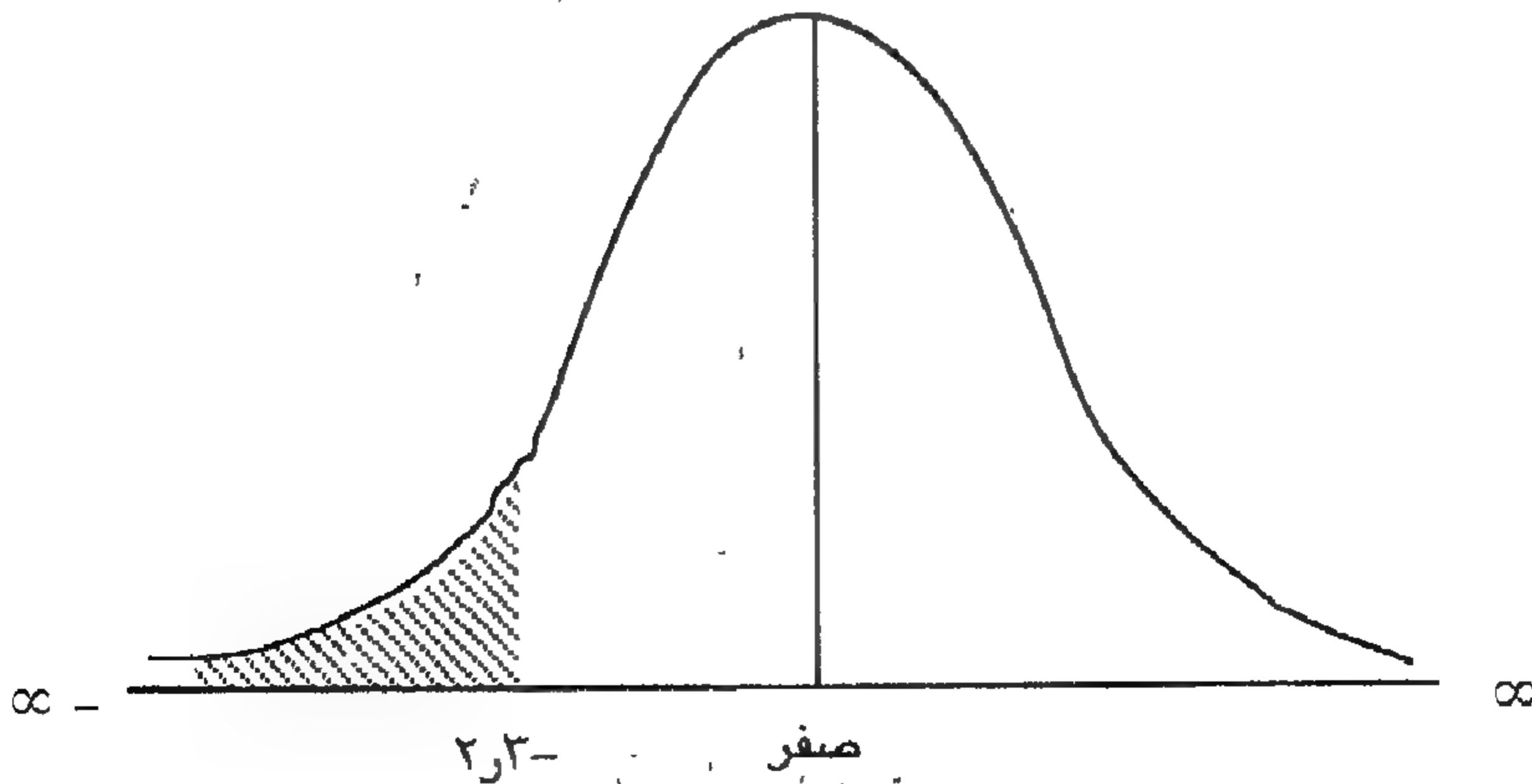
ولكن الجدول يعطي ح ($٢ر٣ > \alpha$) أى يعطى الجزء المكمل وبالتالي فإن:

$$\text{ح} (٢ر٣ < \alpha) = ١ - \text{ح} (٢ر٣ > \alpha)$$

$$= ١ - .٩٨٩٢٨$$

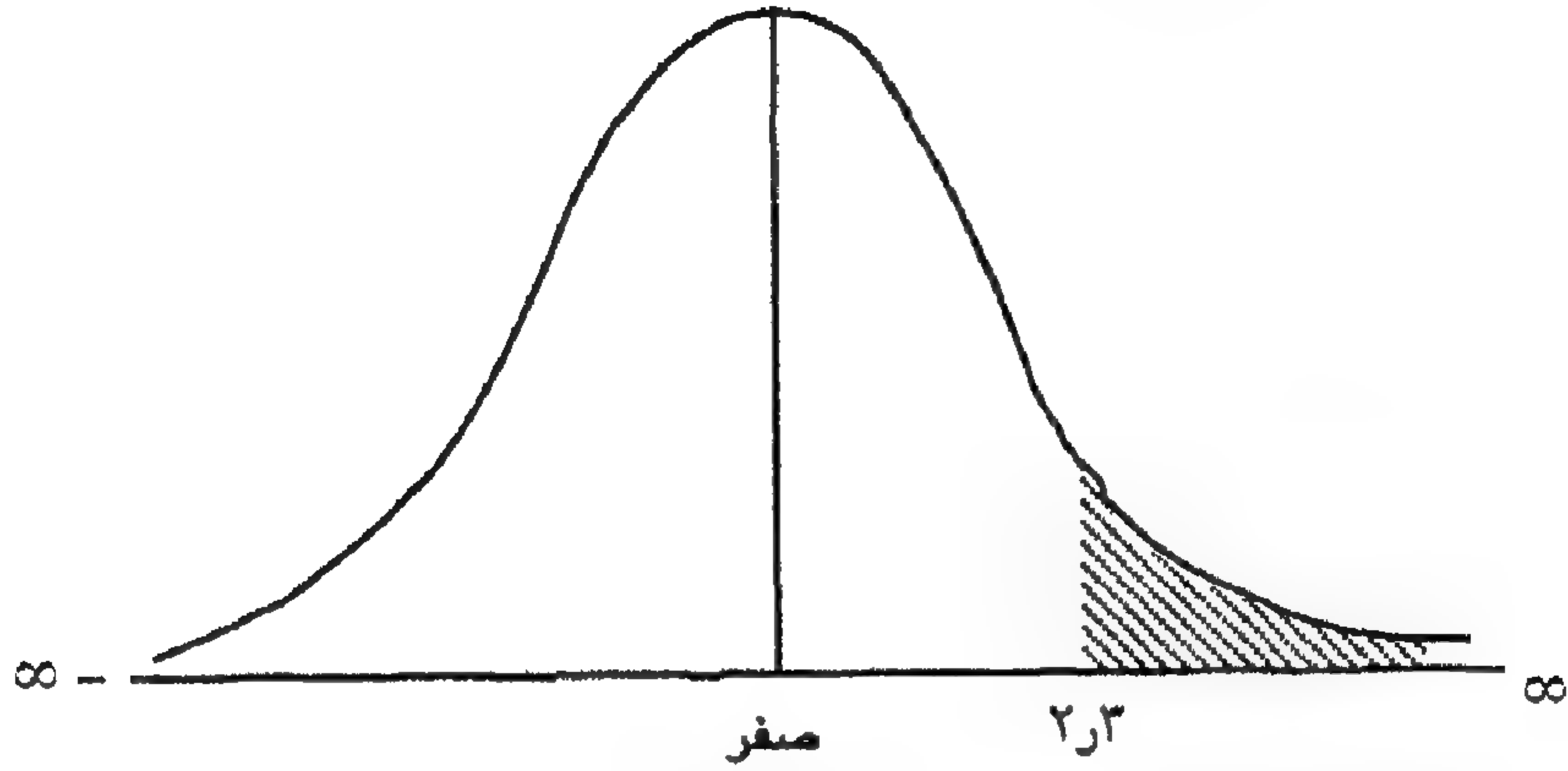
$$= .٠١٠٧٢$$

د- المساحة المحصورة بين $-\infty$ ، $٢ر٣$ يمكن توضيحها كما يلي:



شكل رقم ٧

وحيث أن المنحنى متماثل فإن هذه المساحة تساوى تماما المساحة الموجودة في الجانب الايمن والتي يمكن توضيحها بالشكل التالي:



شكل رقم ٨

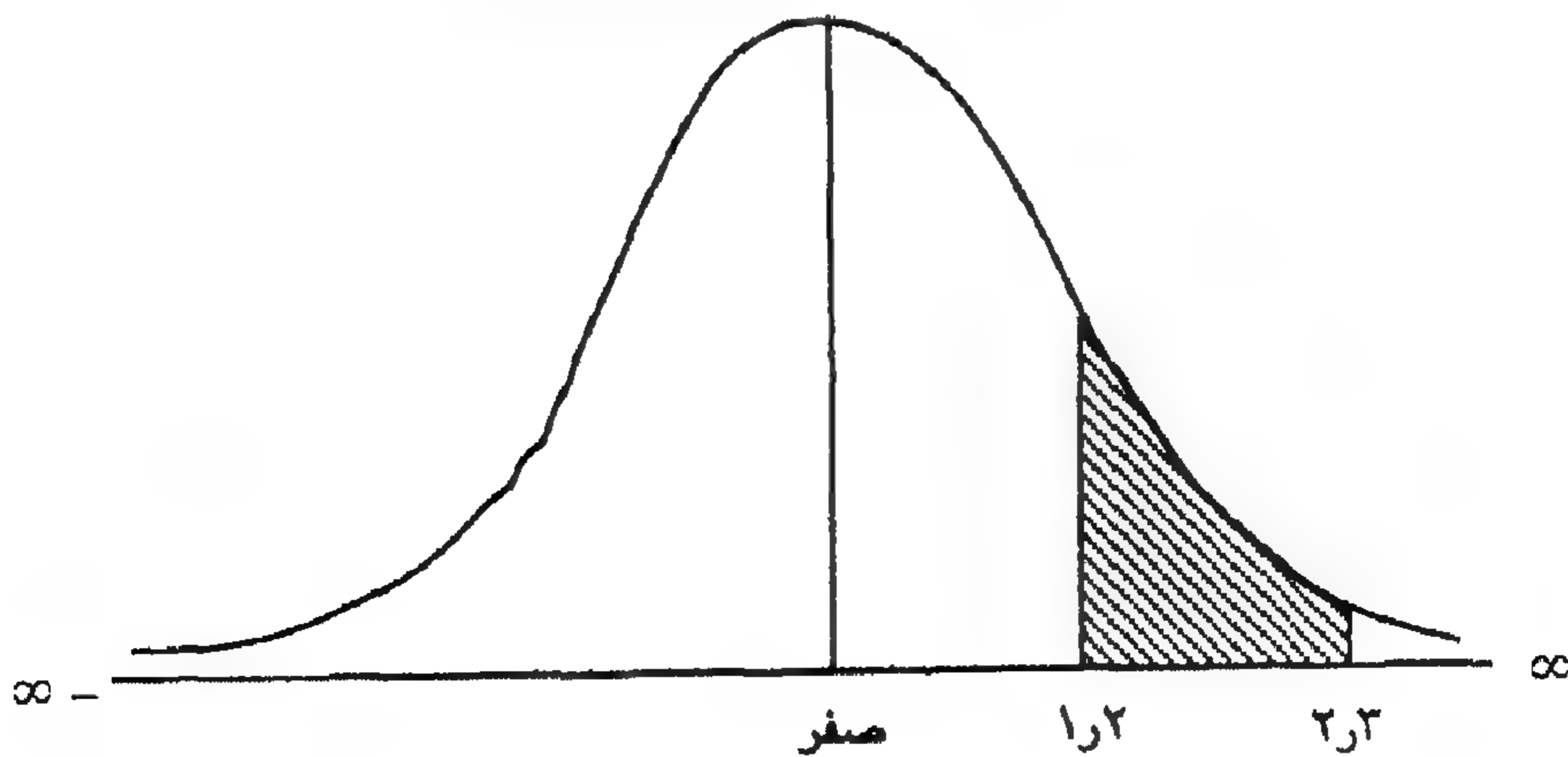
$$\text{أى أن ح (ى > ٢ر٣)} = \text{ح (ى < ٢ر٣)}$$

$$\text{ح (ى < ٢ر٣)} = ١ - \text{ح (ى > ٢ر٣)}$$

$$= ١ - ٩٨٩٢٨ر$$

$$= ١٠٧٢ر$$

هـ - المساحة المحصورة بين ١,٢ ، ٢,٣ يمكن توضيحها بالشكل التالي:



شكل رقم ٩

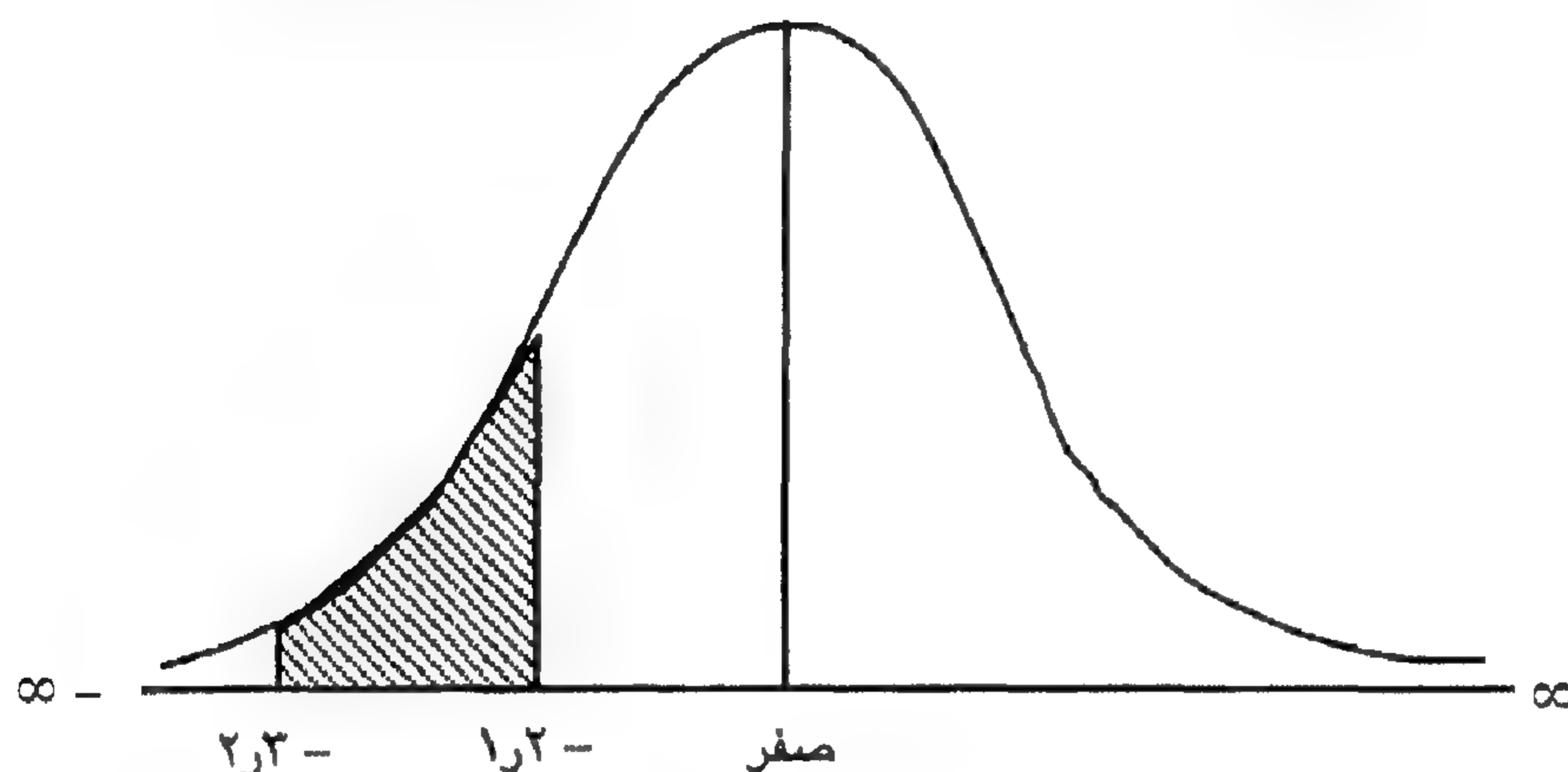
وهذه المساحة كما يتضح من الشكل السابق عبارة عن:

$$ح(١ر٢ > ٢ر٣) = ح(٢ر٣ > ٢ر٣) - ح(٢ر٣ > ١ر٢)$$

$$= ٩٨٩٢٨ر - ٨٨٤٩٣ر$$

$$= ١٠٤٣٥ر$$

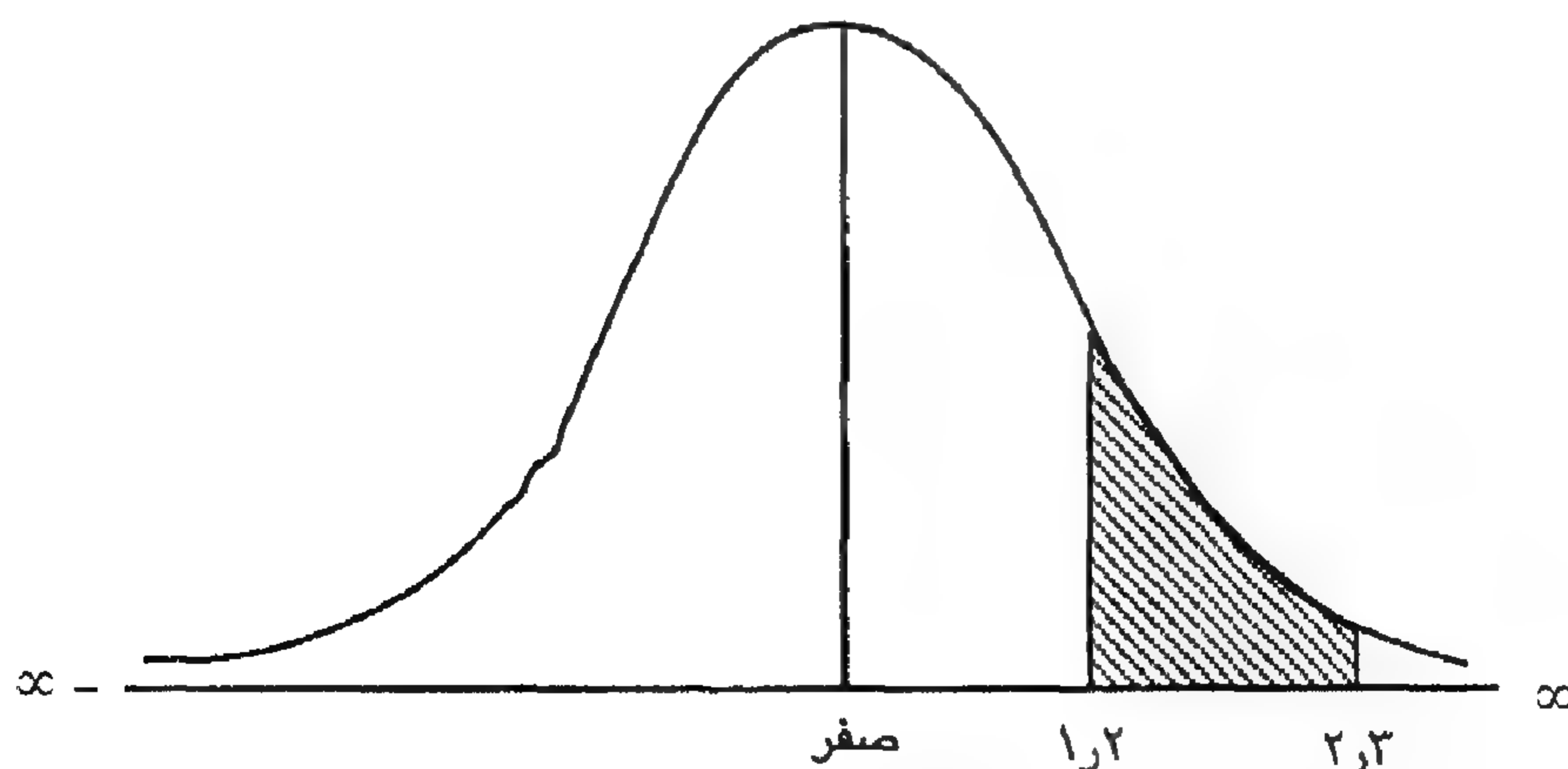
و- المساحة المحصورة بين - ٢ر٣ ، - ١ر٢ يمكن توضيحها بالشكل التالي:



شكل رقم ١٠

وهذه المساحة كما يتضح من الشكل السابق تناظر تماما المساحة الموجودة في

الطرف الأيمن والتي يمكن توضيحها بالشكل التالي:



شكل رقم ١١

وهذه المساحة كما يتضح من الشكل السابق عبارة عن :

$$ح (١٢ > ٢٣) = ح (٢٣ > ٢٣) - ح (٢٣ > ١٢)$$

$$= ٩٨٩٢٨ - ٨٨٤٩٣$$

$$= ١٠٤٣٥$$

مثال:

يتبع توزيع مبالغ وثائق التأمين فرع السيارات بأحدى شركات التأمين التوزيع الطبيعي بمتوسط قدرة ١٦٠٠٠ جنيها وتباين قدره ١٦٠٠٠ جنيها ، فإذا اخترنا عشوائيا وثيقة من هذا الفرع احسب:-

أ- احتمال أن يقل مبلغ الوثيقة عن ١٨٠٠٠ جنيها

ب- احتمال أن يزيد مبلغ الوثيقة عن ١٩٠٠٠ جنيها

ج- احتمال أن يتراوح مبلغ الوثيقة بين ١٥٠٠٠ ، ١٧٠٠٠ جنيها

د- احتمال أن يتراوح مبلغ الوثيقة بين ١٧٠٠٠ ، ١٩٠٠٠ جنيها

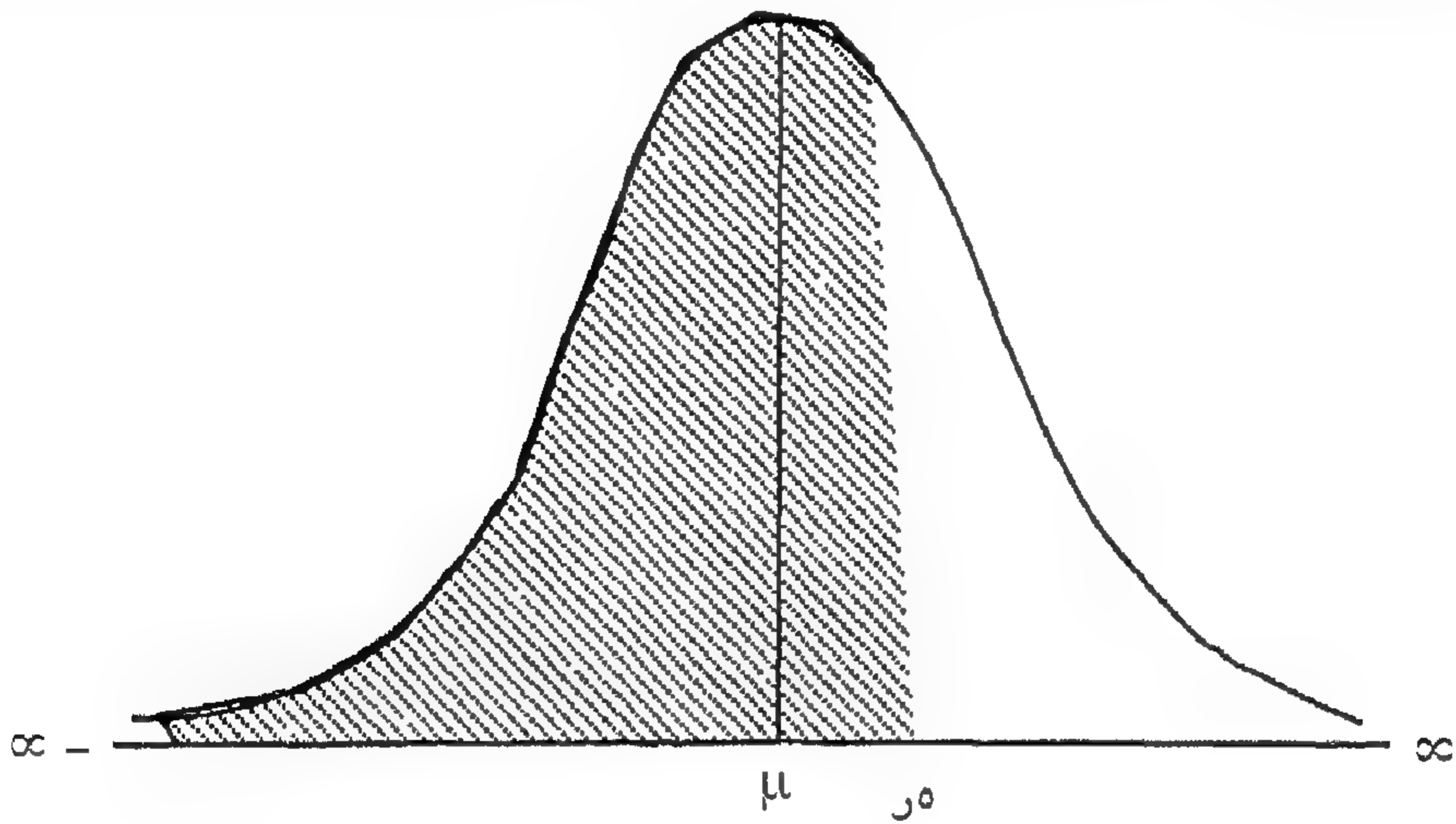
هـ- عدد الوثائق التي تزيد مبالغ تأمينها عن ١٨٠٠٠ جنيها اذا علمت أن عدد الوثائق بهذا الفرع هو ١٠٠٠٠ وثيقة.

و- احتمال أن يكون مجموع مبالغ ٧٥ وثيقة من هذه الوثائق في حدود ١٢٥٠٠٠٠ جنيها.

الحل: أ- احتمال أن يقل مبلغ الوثيقة عن ١٨٠٠٠ جنيها.

$$z = \frac{\mu - x}{\sigma}$$

$$z = \frac{16000 - 18000}{4000} = -0.5$$



شکل رقم ۱۲

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

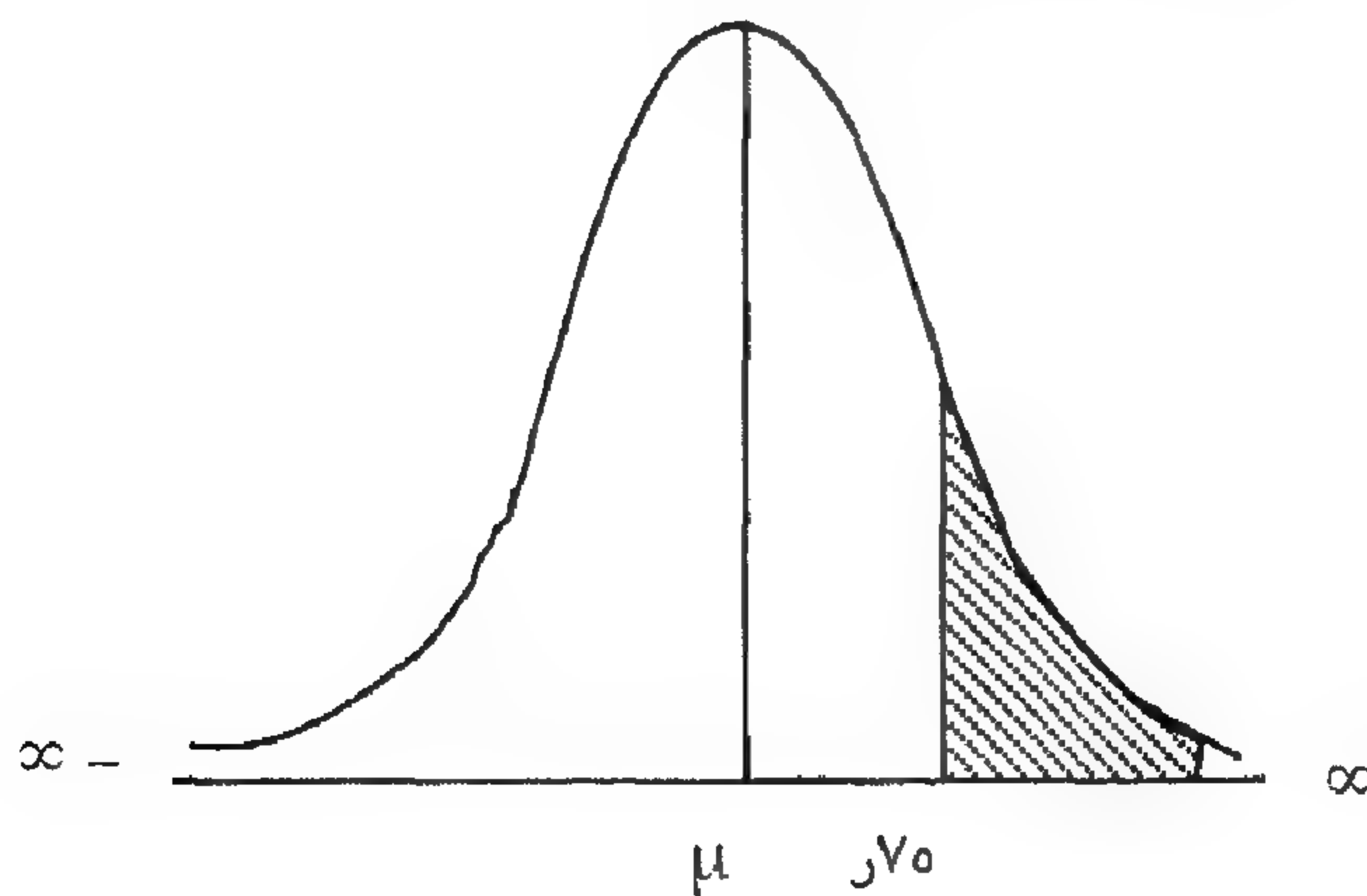
ح (ی > ۵۰) = ۶۹۱۴۶

ب- احتمال أن يزيد مبلغ الوثيقة عن ١٩٠٠٠ جنيها:

$$r_{70} = \frac{17... - 19...}{8...} = 5$$

$$\therefore \text{ح} (y < 75) = 1 - \text{ح} (y > 75)$$

$$r_{22663} = r_{77337} - 1 =$$



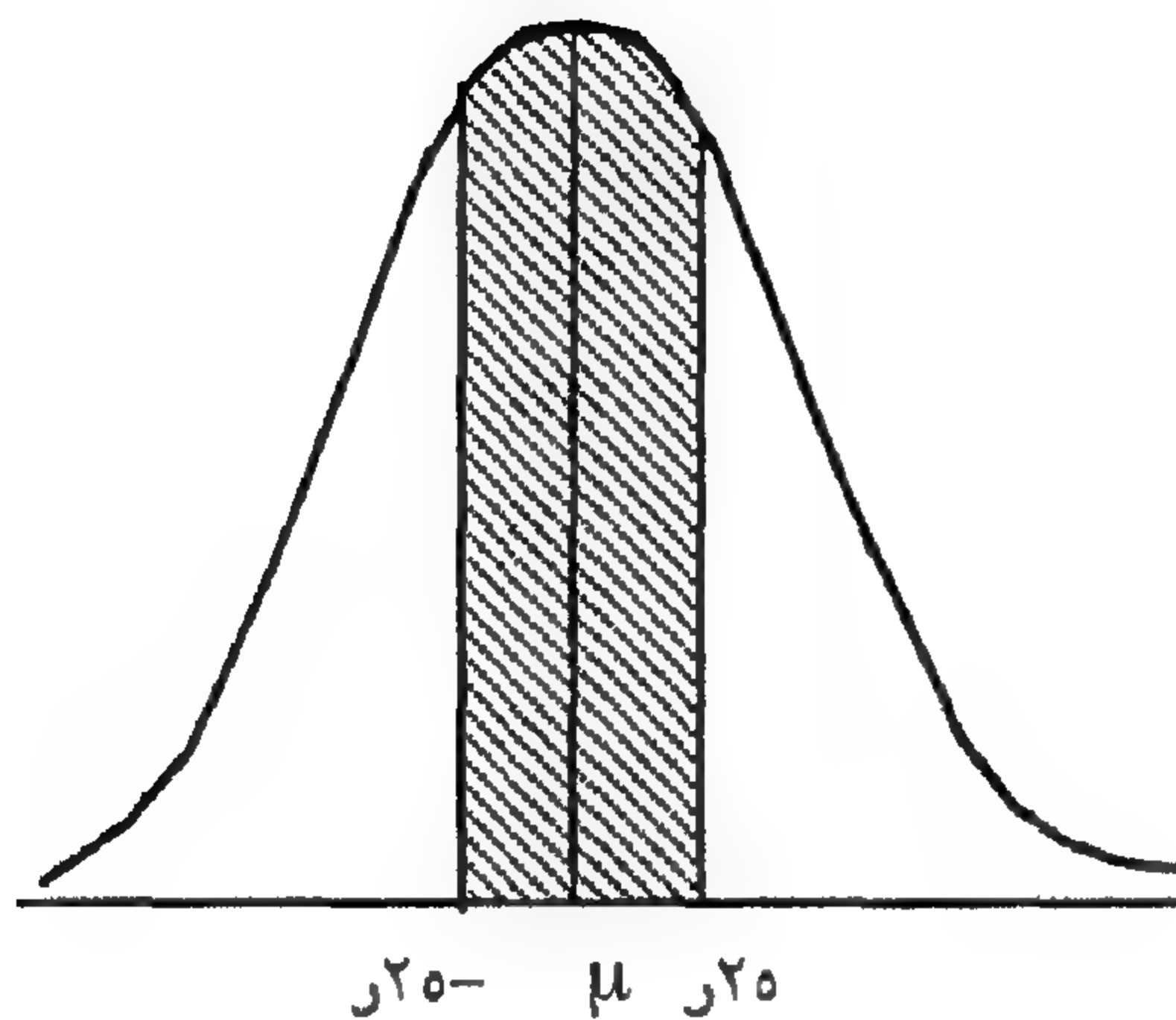
شکل رقم ۱۳

ح - احتمال أن يتراوح مبلغ الوثيقة بين ١٥٠٠٠ ، ١٧٠٠٠ جنيها

$$z = \frac{\mu - x}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{16000 - 15000}{4000} = 2.5$$

$$z_2 = \frac{16000 - 17000}{4000} = -2.5$$



شكل رقم ١٤ .

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن هذه المساحة عبارة عن:-

$$P(z_1 > z_2) = P(z_1 > z_2) - P(z_1 > z_2)$$

$$P(z_1 > z_2) = 0.9877$$

$$P(z_1 < z_2) = P(z_1 < z_2)$$

$$P(z_1 < z_2) = 1 - P(z_1 > z_2)$$

$$= 1 - 0.9877$$

$$= 0.0123$$

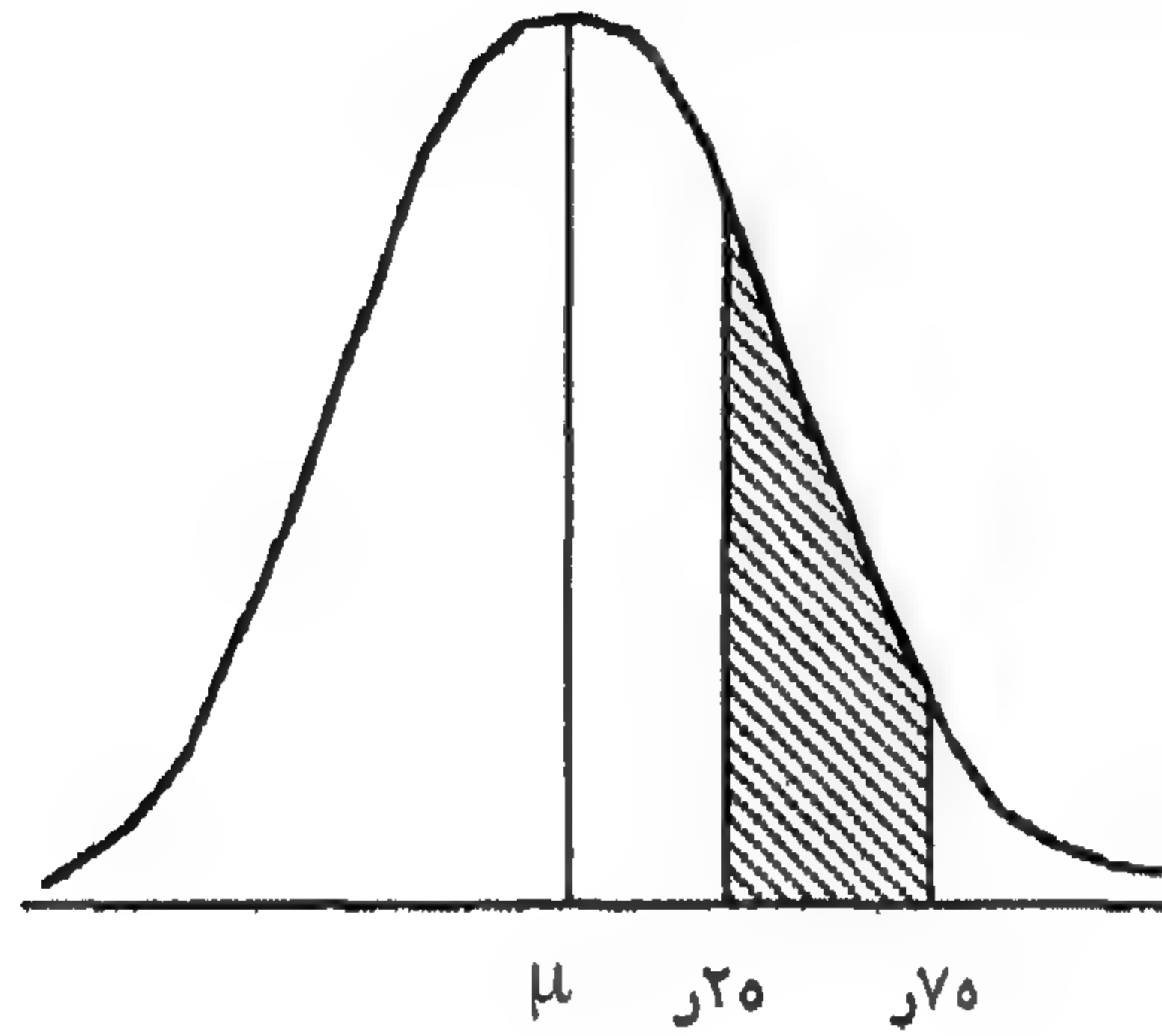
$$\therefore \text{ح} - > ٢٥ > \text{ي} > ٢٥ = ٩٨٧٧ \text{ر} - ٤٠.١٢٣ \text{ر}$$

$$= ١٩٧٥٤ \text{ر}$$

د- إحتمال أن يتراوح مبلغ الوثيقة بين ١٧.٠٠٠ ، ١٩.٠٠٠ جنيها:

$$\text{ي} ١ = \frac{١٦.٠٠٠ - ١٧.٠٠٠}{٤.٠٠٠} = ٢٥ \text{ر}$$

$$\text{ي} ٢ = \frac{١٦.٠٠٠ - ١٩.٠٠٠}{٤.٠٠٠} = ٧٥ \text{ر}$$



شكل رقم ١٥

والمساحة المطلوبة عبارة عن:

$$\text{ح} (٢٥ \text{ر} > \text{ي} > ٧٥ \text{ر}) = \text{ح} (ي > ٧٥ \text{ر}) - \text{ح} (ي > ٢٥ \text{ر})$$

$$= ٧٧٣٣٧ \text{ر} - ٩٨٧٧ \text{ر}$$

$$= ١٧٤٦٠ \text{ر}$$

هـ- عدد الوثائق التي تزيد مبالغ تأمينها عن ١٨٠٠٠ جنيهاً:

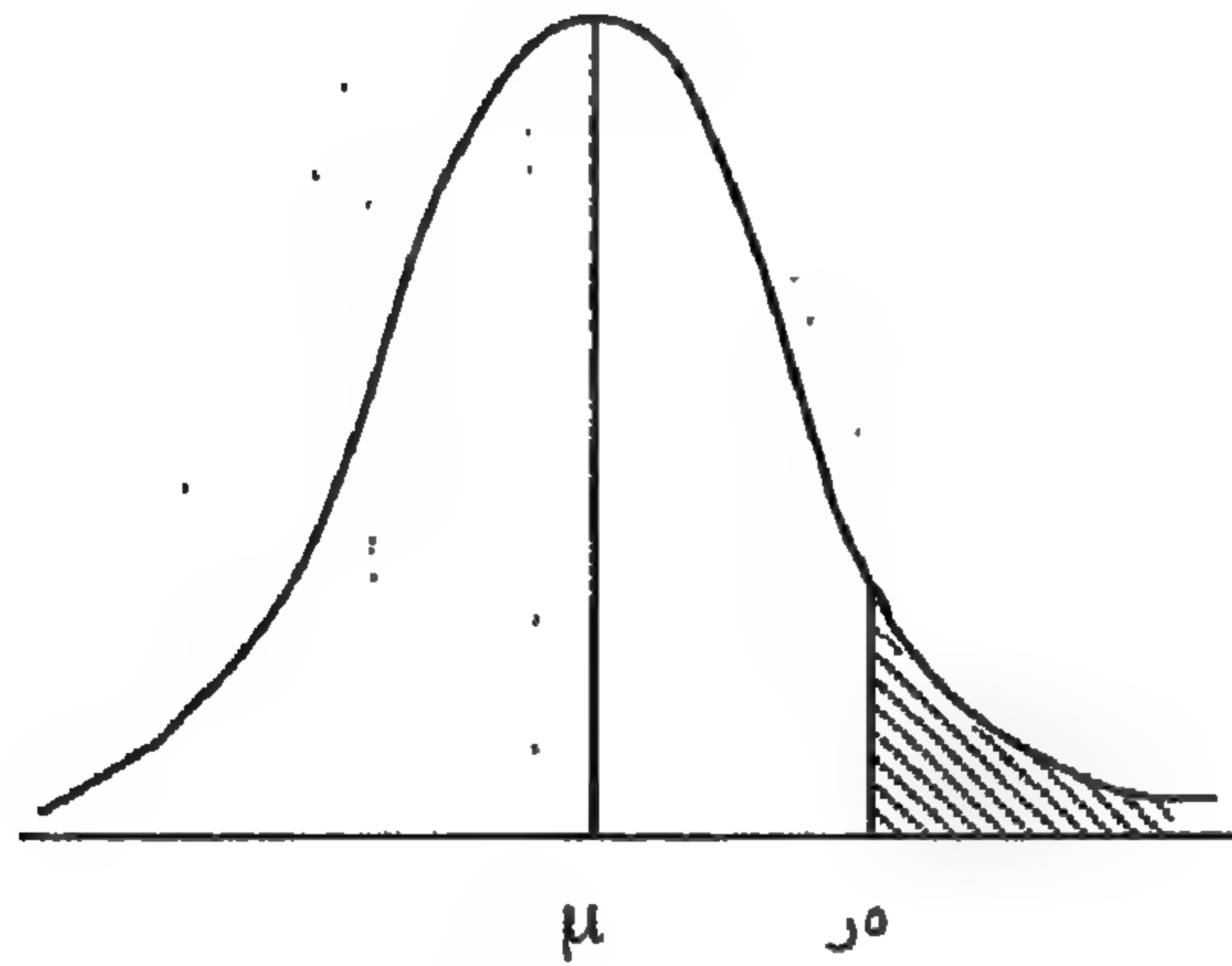
يتم أولاً حساب احتمال أن يزيد مبلغ الوثيقة عن ١٨٠٠٠ جنيهاً كما يلي:-

$$y = \frac{16000 - 18000}{4000} = -0.5$$

$$H(y < -0.5) = 1 - H(y > -0.5)$$

$$= 1 - 0.69146$$

$$= 0.30854$$



شكل رقم ١٦

∴ من بين ١٠٠٠٠٠ وثيقة يوجد ٣٠٨٥٤٪ من عدد الوثائق يزيد قيمته عن ١٨٠٠٠

∴ عدد الوثائق التي تزيد قيمتها عن ١٨٠٠٠ = ٣٠٨٥٤ × ١٠٠٠٠٠ = ٣٠٨٥٤ وثيقة

و- لحساب احتمال أن مجموع مبالغ ٧٥ وثيقة من هذه الوثائق يكون في حدود ١٢٥٠٠٠٠

جنيهاً فإننا إزاء متغير عشوائى جديد (مجموع مبالغ الوثائق وليس مبلغ الوثيقة

الواحدة) وطبقاً لنظرية النزعة المركزية فإنه إذا كان لدينا مجموع متغيرات عشوائية

مستقلة تتوزع توزيعاً طبيعياً (أو تتوزع أى توزيع آخر ولكن قيمة n كبيرة) فإن

المتغير العشوائى الجديد وهو مجموع مبالغ الوثائق يتوزع أيضاً توزيعاً طبيعياً ولكن

$$\text{بمتوسط} = \mu \times n = 75 \times 16000 = 1200000$$

$$\text{وبتباين} = \sim \times \sigma^2 = 75 \times 160000 = 12000000$$

∴ احتمال أن مجموع مبالغ ٧٥ وثيقة من هذه الوثائق يكون في حدود ١٢٥٠٠٠٠ جنيهاً يساوي:

$$y = \frac{12000000 - 1250000}{\sqrt{12000000}} = \frac{10750000}{34641} = 1.44 \quad (\text{أي } y > 1.44)$$

وبالبحث في الجدول نجد أن هذه القيمة تناظر احتمالاً قدره: ٩٢٥٠٧

أسئلة على الوحدة الدراسية الثامنة

- ١- اذا علمت أن توزيع الوثائق حسب مبالغ التأمين تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط ٥٠٠٠٠ جنيهاً وتباين ٤٠٠٠٠٠٠٠ جنيهاً، فإذا اخترنا إحدى الوثائق عشوائياً فاحسب:
- أ - احتمال أن يقل مبلغ تأمينها عن ٨٠٠٠٠ جنيهاً
- ب- احتمال أن يزيد مبلغ تأمينها عن ٩٥٠٠٠ جنيهاً
- ج- احتمال أن يتراوح مبلغ تأمينها بين ٧٥٠٠٠ ، ١٠٥٠٠٠ جنيهاً
- د- عدد الوثائق التي تزيد مبالغ تأمينها عن ١١٠٠٠٠ جنيهاً اذا كان عدد الوثائق الاجمالي في الشركة هو ٢٠٠٠٠٠ وثيقة
- هـ- أن يكون مجموع مبالغ التأمين التي اشتراها ١٢٠ مؤمن عليه في حدود ١٣٠٠٠٠٠٠ جنيهاً.

الوحدة الدراسية التاسعة
التوزيع الطبيعي كتقريب لبعض
التوزيعات المنفصلة

الوحدة الدراسية التاسعة

موضوعها: التوزيع الطبيعي كتقريب لبعض التوزيعات المنفصلة

هدفها : تعريف الطالب بكيفية استخدام التوزيع الطبيعي فى حساب الاحتمالات المختلفة التى تتعلق بالتوزيعات المنفصلة الممثلة لعدد الحوادث.

عناصرها: التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذى الحدين.

التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون.

التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذى الحدين السالب.

التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين:

سبق أن أوضحنا عند دراستنا لتوزيع ذي الحدين أن دالة كثافة الاحتمال تأخذ الشكل التالي:

$$P(s) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}$$

ولكن حساب الاحتمالات المختلفة وفقا لهذه المعادلة تكون عملية شاقة وتحتاج لمجهود كبير خاصة عندما تكون قيمة p كبيرة ومثال ذلك:

$$P(400) = \binom{1000}{400} (0.7)^{400} (0.3)^{600}$$

ولهذا إتجه التفكير إلى استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب جيد لحساب قيم الاحتمالات المختلفة لتوزيع ذي الحدين عندما تكون قيمة p كبيرة.

ولكن يؤخذ في الاعتبار أن استخدام التوزيع الطبيعي لحساب قيم الاحتمالات الخاصة بتوزيع ذي الحدين يتطلب توافر شروط معينة يمكن التعبير عنها من خلال النظرية التالية:

" إذا كانت قيمة احتمال تحقق حادث ما هي p غير قريبة من الصفر أو من الواحد الصحيح فإن توزيع ذي الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط p وانحراف معياري $\sqrt{np(1-p)}$ وذلك كلما إقتربت p من مالا نهاية "

وهذا يعنى أنه إذا كان لدينا المتغير العشوائى s الذى يتبع توزيع ذي الحدين وكانت p بعيدة عن الصفر والواحد الصحيح (أى قريبة من $\frac{1}{2}$) فإن المتغير y حيث:

$y = \frac{s - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ يتوزع توزيعا طبيعيا معياريا بمتوسط صفر ، انحراف معياري واحد صحيح كلما إقتربت p من مالا نهاية.

ونظرا لأن توزيع ذي الحدين هو توزيع منفصل وأن التوزيع الطبيعي هو توزيع متصل لذلك فإننا نفترض بالنسبة للتوزيع المنفصل أن النقطة الموجود عندها الاحتمال موجودة فى

مركز الفئة وأن طول الفئة واحد صحيح أى أن الاحتمال يمثله مستطيل قاعدته واحد صحيح وإرتفاعه يساوى الاحتمال المناظر لمركز الفئة ، فإذا كان هناك إحتمال عند النقطة ٤ فإنه يتم رسم مستطيل قاعدته واحد سنتيمتر ويبدأ من ٢.٥ حتى ٣.٥ وبالتالى يمكن القول بأن

$$\text{المتغير } Y \text{ حيث : } Y = \frac{(S \pm \frac{1}{2}) - L}{\sqrt{L \cdot K}}$$

يتوزع توزيعاً طبيعياً معيارياً والأمثلة التالية توضح كيفية الاستفادة من التوزيع الطبيعي عند حساب الاحتمالات الخاصة بتوزيع ذى الحدين:

مثال (١) :

إذا كان احتمال أن تكون الوحدة المنتجة جيدة هو ٨٠، فإذا سحبنا عينة مكونة من ١٥ وحدة فاحسب احتمال أن يوجد بينها ١٠ وحدات جيدة

الحل: أولاً باستخدام توزيع ذى الحدين:

$$K(S) = \binom{L}{S} p^S q^{L-S}$$

$$K(10) = \binom{15}{10} 0.8^{10} \times 0.2^5$$

$$K(10) = \frac{15!}{10! \times 5!} \times 0.8^{10} \times 0.2^5 = 0.00032 \times 0.7374182 = 0.00032 \times 0.7374182$$

$$0.00032 \times 0.7374182 = 0.00032 \times 0.7374182 = 0.00032 \times 0.7374182 = 0.00032 \times 0.7374182$$

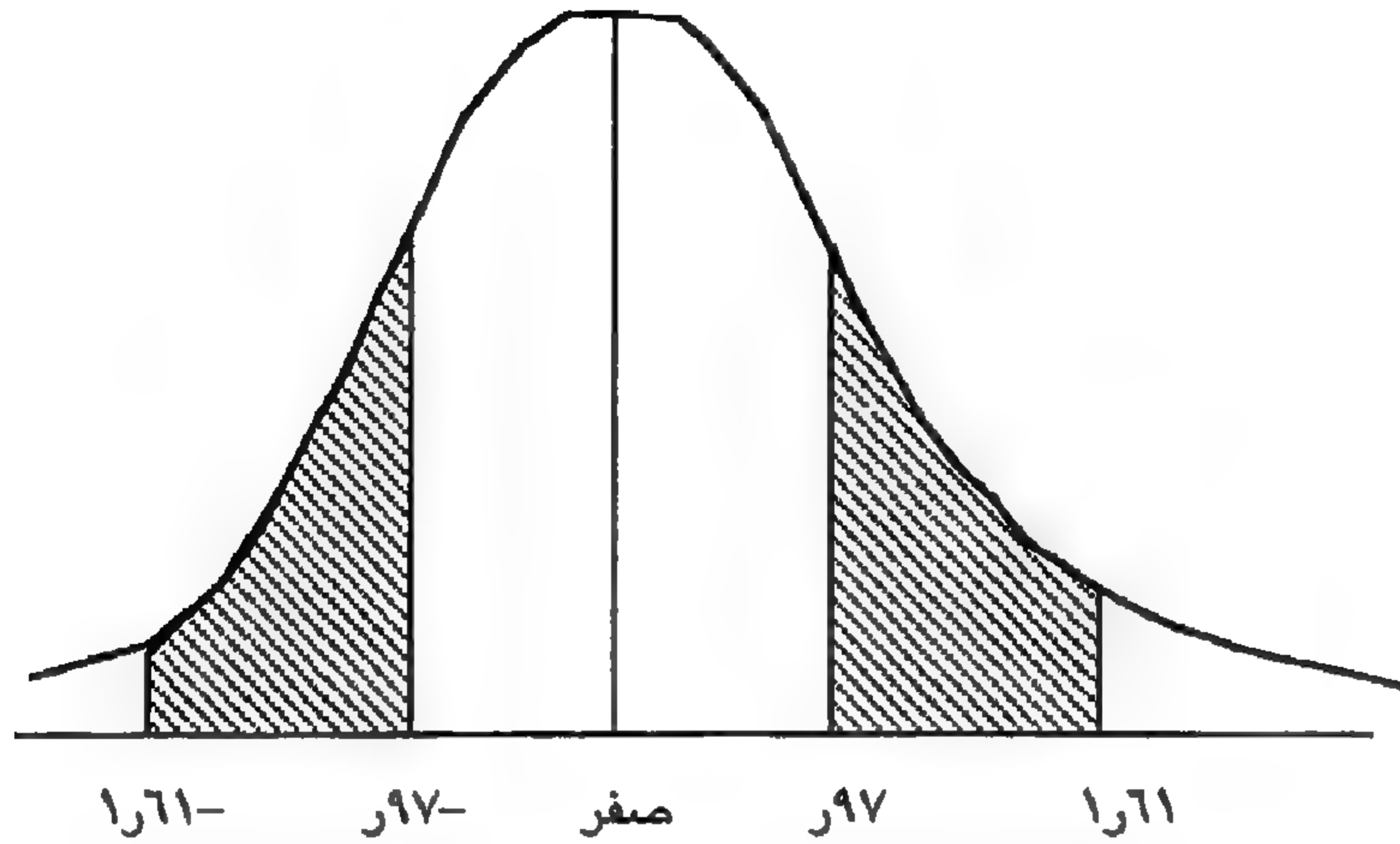
ثانياً : باستخدام التوزيع الطبيعي:

$$Y = \frac{(S - \frac{1}{2}) - Lp}{\sqrt{Lpq}}$$

$$= \frac{8 \times 15 - (\frac{1}{2} - 10)}{\sqrt{2 \times 8 \times 15}}$$

$$١٢ - ٩٥ = \frac{١٢ - ٩٥}{\sqrt{٢٤}} = ١$$

$$١٢ - ١٠٥ = \frac{١٢ - ١٠٥}{\sqrt{٢٤}} = ٢$$



وبالكشف فى جدول التوزيع الطبيعى المعيارى نحصل على الاحتمالات التالية:

$$٩٤٦٣٠ = (١) ك$$

$$٨٣٣٩٨ = (٢) ك$$

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} = ٨٣٣٩٨ - ٩٤٦٣٠ = ١١٢٣٢$$

وهذه النتيجة قريبة جدا من النتيجة السابق الحصول عليها باستخدام توزيع ذى

الحدين وهى ١٠.٣١٨٢

$$\text{والفرق بينهما} = ١١٢٣٢٠ - ١٠.٣١٨٢ = ٠.٩١٣٨$$

مثال (٢):

إذا كان احتمال أن تكون الوحدة المنتجة جيدة هو ٦٠ فاذا سحبنا عينة مكونة من ١٥

وحدة فاحسب احتمال أن يكون من بينها ١٠ وحدات جيدة.

الحل:

أولاً: باستخدام توزيع ذي الحدين:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = 10) = \binom{15}{10} (0.6)^{10} (0.4)^5$$

$$= \frac{15!}{10!5!} \times (0.6)^{10} \times (0.4)^5 = 1859380$$

ثانياً: باستخدام التوزيع الطبيعي:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{10 - 9}{\sqrt{1.8}} = 2.45$$

$$P(Z \leq 2.45) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2.45} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.9938$$

$$P(Z \leq 2.45) = 0.9938$$

$$P(Z \leq 2.45) = 0.9938$$

وبالكشف في جدول التوزيع الطبيعي المعياري نحصل على الاحتمالات التالية:

$$P(Z \leq 2.45) = 0.9938$$

$$P(Z \leq 2.45) = 0.9938$$

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} = 0.9938 - 0.9938 = 0.0000$$

وهذه النتيجة قريبة جدا من النتيجة السابق الحصول عليها باستخدام توزيع ذي الحدين وهي ١٨٥٩٣٨

$$\text{والفرق بينهما} = ١٨٥٩٣٨ - ١٨٢٦٧ = ٣٢٦٨$$

ونلاحظ أن الفرق قد انخفض عن المثال السابق نظرا لاقتراب احتمال النجاح من $\frac{1}{2}$ وايضا كلما زاد عدد مرات التجربة كلما اقترب الفرق بين الاحتمال المحسوب باستخدام ذي الحدين والاحتمال المحسوب باستخدام التوزيع الطبيعي من الصفر .

التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون:

عند دراستنا لتوزيع بواسون علمنا أنه لحساب احتمال أن يقع المتغير s بين قيمتين وليكن s_1 ، s_2 فإننا نحصل على ذلك الاحتمال بجمع الاحتمالات ابتداء من احتمال الحصول على s_1 وحتى احتمال الحصول على s_2 وهذه العملية قد تكون غير مناسبة في التطبيق وخاصة عندما تكون قيمة المتوسط (μ) كبيرة ولكن هناك خاصية هامة لتوزيع بواسون تنص على أن مجموع متغيرات عشوائية مستقلة تتوزع كل منها بواسون هو أيضا يتوزع بواسون بمتوسط يساوي مجموع متوسطات المتغيرات العشوائية المستقلة (أي أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي يتوزع بواسون بمتوسط ٨ فإنه يمكن النظر اليه على أنه يمثل مجموع ٨ متغيرات عشوائية تتوزع بواسون بمتوسط واحد لكل منها أو أنه يمثل مجموع ١٦ متغير عشوائي يتوزع بواسون بمتوسط $\frac{1}{2}$ لكل منها وهكذا...)

$$\frac{s - \mu}{\sqrt{\mu}} = \text{وعلى ذلك فإنه يمكن القول طبقا لنظرية النزعة المركزية أن المتغير } y$$

يتوزع توزيعا طبيعيا معياريا حيث μ هي متوسط توزيع بواسون μ هي الانحراف المعياري والأمثلة التالية توضح كيفية الاستفادة من هذا التقريب.

مثال (٣):

فيما يلي بيان عن نتائج فرع السيارات خلال عام ١٩٩٠ بإحدى شركات التأمين المصرية موزعة حسب عدد الحوادث:

عدد الحوادث	صفر	١	٢	٣	المجموع
عدد الوثائق	٣٢٨٨	٦٤٢	٦٦	٤	٤٠٠٠

فاذا علمت أن عدد الحوادث يتبع توزيع بواسون

المطلوب:

حساب احتمال أن عدد الحوادث الذي تتعرض له أى وثيقة هو ٢ على الأقل.

الحل:

يتم أولاً حساب قيمة μ (متوسط عدد الحوادث لأى وثيقة) كما يلي:

جدول ١

عدد الحوادث س	عدد الوثائق ك	س ك
صفر	٣٢٨٨	صفر
١	٦٤٢	٦٤٢
٢	٦٦	١٣٢
٣	٤	١٢
المجموع	٤٠٠٠	٧٨٦

$$\therefore \bar{s} = \frac{786}{400} = 1.965$$

وبمساواة المتوسط النظري μ بالمتوسط الفعلي \bar{s}

\therefore احتمال الحصول على خسارتين على الأقل = احتمال الحصول على خسارتين أو ٣ أو ٤ أو ...

$$= 1 - (\text{احتمال الحصول على خسارة واحدة أو عدم حدوث أى خسارة})$$

$$= 1 - \left(\frac{\mu \times \mu^0}{\text{صفر}} + \frac{1 \times \mu^1}{1} \right)$$

$$= 1 - \left(27183 - 1965 \times 1965 + \frac{1965^2}{1} \right)$$

$$= 1 - (82160 + 16144)$$

$$= 1 - 98304 = 0.1696$$

باستخدام التوزيع الطبيعي فإن احتمال حدوث خسارتين على الأقل

$$= P\left(Y < \frac{\bar{s} - \mu}{\sigma} \right) \text{ حيث } \sigma = \sqrt{\mu}$$

$$= P\left(Y < \frac{1965 - 1965}{\sqrt{1965}} \right)$$

$$= P(Y < 0)$$

$$= 1 - P(Y > 0)$$

$$= 1 - 0.164 = 0.836$$

وبمقارنة الإحتمال المحسوب باستخدام الطريقتين نجد أن هناك فرق قدرة = ٠.١٦٩٦ ر
 - ٠.١٦٤ ر = ٠.١٥٢٠ ر ونجد أن الفرق كبير نظراً لأن قيمة μ صغيرة (أصغر من ٥٠ بمقدار كبير)

مثال (٤) :

إذا علمت أن عدد الحوادث في فرع السيارات يتبع توزيع بواسون بمتوسط قدره ٤٥ ر، بالنسبة لإحدى السيارات إحسب إحتمال أن تتعرض لخسارتين على الأقل.

الحل:

أولاً: باستخدام توزيع بواسون:

إحتمال حدوث خسارتين على الأقل = ١ - (إحتمال عدم حدوث أى خسارة أو حدوث خسارة واحدة)

$$= \left(\frac{\mu^0 \times e^{-\mu}}{0!} + \frac{\mu^1 \times e^{-\mu}}{1!} \right) - 1 =$$

$$= (e^{-45} + 45e^{-45}) - 1 =$$

$$= (0.286932668 + 0.637628151) - 1 =$$

$$= 0.924560819 - 1 = -0.075439$$

ثانياً: باستخدام التوزيع الطبيعي:

إحتمال حدوث خسارتين على الأقل = ح ($y < \frac{\mu - x}{\sigma}$)

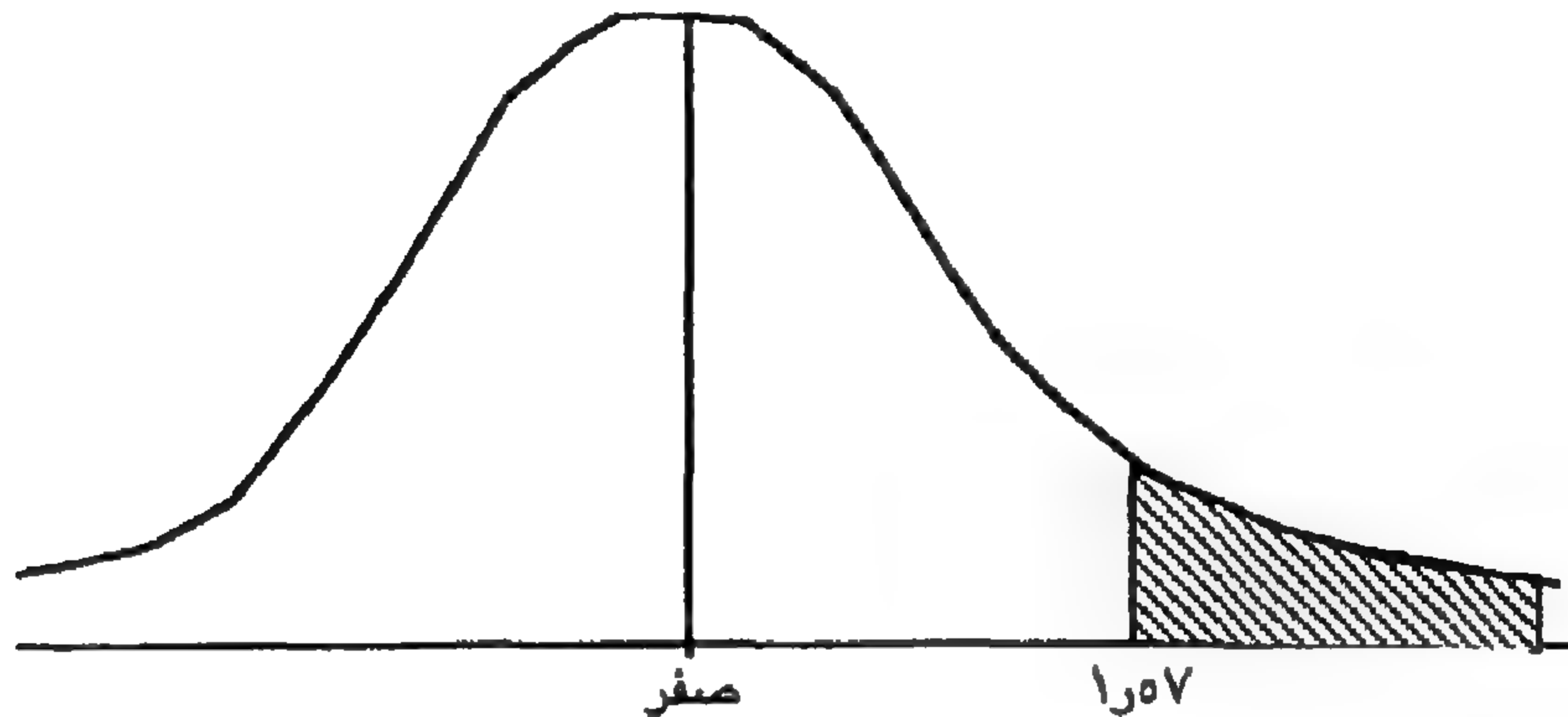
$$= ح (y < \frac{45 - 1}{\sqrt{45}})$$

$$= ح (y < \frac{44}{\sqrt{45}})$$

$$ح = (١٥٧ < ١)$$

$$١ - ح = (١٥٧ > ١)$$

$$١ - ٩٤١٧٩ = ٥٨٢١ = ٠$$



مثال (٥) :

إذا علمت أنه من بين ٢٠٠٠٠ وثيقة تأمين حدث ٢٦٠٠ حادث خلال السنة إحصى احتمال أن يكون عدد الحوادث خلال العام القادم يقل عن ٥٠٠٠ حادث إذا علمت أن عدد الوثائق المتوقع للعام القادم هو ٤٠٠٠٠ وثيقة وأن عدد الخسائر يتبع توزيع بواسون.

الحل:

$$\text{إحتمال حدوث الحادث خلال العام الحالى هو } \frac{٢٦٠٠}{٢٠٠٠٠} = ١٣$$

$$\text{عدد الخسائر المتوقع خلال العام القادم من بين } ٤٠٠٠٠ \text{ وثيقة } = ٤٠٠٠٠ \times ١٣$$

$$= ٥٢٠٠$$

باستخدام التوزيع الطبيعي فإن احتمال أن عدد الحوادث يقل عن ٥٠٠٠ حادث هو:

$$ح = \left(\frac{٥٢٠٠ - ٤٩٩٩,٥}{\sqrt{٥٢٠٠}} > ١ \right)$$

$$= ح (ى < ٢٧٨)$$

$$= ١ - ح (ى > ٢٧٨)$$

$$= ١ - ٩٩٧٢٨ ر = ٠٠٢٧٢ ر$$

ملاحظة :

إذا كان المتوسط μ لتوزيع بواسون يساوى أو أكبر من ٥ فإن النتائج التى نحصل عليها باستخدام التوزيع الطبيعى تكون قريبة جداً من النتائج التى نحصل عليها من توزيع بواسون.

التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ذى الحدين السالب:

بنفس الأسلوب السابق يمكن تقريب توزيع ذى الحدين السالب إلى التوزيع الطبيعى واستخدام جدول التوزيع الطبيعى المعيارى فى حساب الاحتمالات المختلفة باستخدام العلاقة $ى = \frac{\mu - س}{\sigma}$

حيث μ = متوسط توزيع ذى الحدين السالب

σ = الانحراف المعيارى لتوزيع ذى الحدين السالب

هناك خاصية هامة لتوزيع ذى الحدين السالب تنص على أنه إذا كان لدينا مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة التى تتبع توزيع ذى الحدين السالب عددها $ر$ ولكل منها المعلمتين ١ ، ل فإن مجموع هذه المتغيرات العشوائية يتبع توزيع ذى الحدين السالب بمعلمتين $ر$ ، ل وكلما زادت قيمة $ر$ كلما إقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعى وذلك طبقاً لنظرية النزعة المركزية.

أسئلة على الوحدة الدراسية التاسعة

١- إذا علمت أنه من بين كل ٢٠٠٠٠ سيارة مؤمن عليها تتعرض ٨٠٠٠ سيارة لحادث واحد خلال السنة، فإذا إختربنا ٥٠٠ سيارة عشوائياً فأحسب بطريقتين مختلفتين:

أ- إحتمال أن يكون من بينها ٢٠٠ سيارة قد تعرضت لحادث.

ب- إحتمال أن يكون من بينها ٢٠٠ سيارة على الأقل قد تعرضت لحادث.

ج- إحتمال أن يكون من بينها ٢٠٠ سيارة على الأكثر قد تعرضت لحادث.

قارن بين النتائج التى تحصل عليها فى ظل كل طريقة مع التعليق عليها.

٢- فيما يلى بيان عن نتائج فرع السيارات خلال عام ١٩٩٢ بإحدى شركات التأمين المصرية.

عدد الحوادث	صفر	١	٢	٣	المجموع
عدد الوثائق	٨٠٠	١٥٥	٤٠	٥	١٠٠٠

فإذا علمت أن عدد الحوادث يتبع توزيع بواسون

المطلوب:

أ- حساب إحتمال أن عدد الحوادث الذى تتعرض له أى وثيقة هو حادث على الأقل

ب- حساب إحتمال أن عدد الحوادث الذى تتعرض له أى وثيقة هو حادثين فقط.

٣- احسب المطلوب فى السؤال رقم (٢) إذا علمت أن عدد الحوادث يتبع توزيع ذى الحدين السالب.

الوحدة الدراسية العاشرة
التوزيع المناسب لقيمة الخسارة

الوحدة الدراسية العاشرة

موضوعها: التوزيع المناسب لقيمة الخسارة .

هدفها : تعريف الدارس بأهم التوزيعات الإحتمالية المناسبة لقيمة الخسارة .

عناصرها:

- التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي .

- التوزيع الأسّي السالب .

- توزيع جاما .

- توزيع باريتو .

التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي: Log Normal Distribution

تأخذ دالة كثافة الاحتمال للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي الشكل الآتي:

$$f(s) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln s - \mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad s > 0$$

$$\text{والمتوسط} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$$

$$\text{والتباين} = \sigma^2 + \mu^2 \times (1 - \sigma^2)$$

وحيث أن الدالة السابقة من الدوال التي يصعب الحصول على تكاملها فقد أمكن إثبات أن المتغير:

$$y = \frac{\ln s - \mu}{\sigma} \text{ يتوزع توزيعاً طبيعياً}$$

وبالتالي يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل من جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي على أساس العلاقة التالية:

$$P(y \geq \frac{\ln s - \mu}{\sigma}) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln s - \mu}{\sigma}\right)$$

والمثال التالي يوضح كيفية تطبيق هذه المعادلة.

مثال (١):

إذا علمت أن قيم الخسائر في فرع التأمين من السطو تتوزع توزيعاً يتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي وذلك بمتوسط ٢١١, ٣٣٠.٩ جنيهاً وتباين ٧٩٨٩٩.٧ إحسب الاحتمالات الآتية:

- أ- أن تكون الخسارة فى حدود ٢٠٠٠ جنيهاً
 ب- أن تكون الخسارة فى حدود ٦٠٠٠ جنيهاً
 ج- أن تتراوح قيمة الخسارة بين ٦٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ جنيهاً
 د- أن تزيد قيمة الخسارة عن ١٠٠٠٠ جنيهاً

الحل:

$$\bullet \bullet \bullet \text{ المتوسط} = \mu = \frac{1}{2}\sigma +$$

$$\text{والتباين} = \sigma^2 = (\mu + \frac{1}{2}\sigma)^2 \times (1 - \frac{1}{2}\sigma) +$$

وبالتعويض بقيمتى المتوسط والتباين ينتج أن:

$$(1) \quad \mu = 33.9, 211 = \frac{1}{2}\sigma +$$

$$(2) \quad 79899.7 = (\mu + \frac{1}{2}\sigma)^2 \times (1 - \frac{1}{2}\sigma)$$

وبقسمة المعادلة الثانية على مربع المعادلة الأولى ينتج أن :

$$1 - \frac{1}{2}\sigma = 7296136$$

$$\bullet \bullet \bullet \quad \frac{1}{2}\sigma = 1, 7296136 \text{ ويأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس } \mu \text{ ينتج أن:}$$

$$\frac{1}{2}\sigma = 0, 547898$$

$$\bullet \bullet \bullet \quad \sigma = 1, 095796$$

وبالتعويض بقيمة σ فى معادلة المتوسط ينتج أن:

$$٢٣.٩٢١١ = \mu + \frac{1}{2} \times ٥٤٧٨٩٨$$

$$٢٣.٩٢١١ = \mu + ٢٧٣٩٤٩ \text{ ، وبأخذ اللوغاريتم الطرفين للأساس هـ}$$

$$٨,١٠٤٤٦٤ = \mu + ٢٧٣٩٤٩$$

$$\therefore \mu = ٧,٨٣٠٥١٥$$

$$\therefore Y = \frac{\mu - \text{لوس}}{\sigma}$$

$$\therefore (أ) \text{ احتمال أن قيمة الخسارة تكون في حدود } ٢٠٠٠ \text{ جنيهاً} = (٢٠٠٠)$$

ويتم حسابها كما يلي:

$$>(٢٠٠٠) = \frac{\text{لو } ٧,٨٣٠٥١٥ - ٢٠٠٠}{,٧٤٠٢}$$

$$= -٣١ = \frac{٧,٨٣٠٥١٥ - ٧,٦٠٠٩,٢٥}{,٧٤٠٢}$$

$$\therefore د (٢٠٠٠) = ح (ي > -٣١)$$

$$ح (ي > -٣١) = ١ - ح (ي < -٣١) \text{ ويتم الكشف في جدول التوزيع الطبيعي}$$

المعياري عن هذه القيمة

$$= ١ - ٠,٦٢١٧٢$$

$$\therefore \text{الاحتمال} = ٠,٣٧٨٢٨$$

(ب) إحتمال أن تكون الخسارة فى حدود ٦٠٠٠ جنيهاً = $K(6000)$

ويتم حسابها كما يلى :

$$U = \frac{7,83.015 - 6000}{,74.2}$$

$$= \frac{7,83.015 - 8,699547}{,74.2}$$

$$= 1,17$$

∴ $K(6000) = H(1,17)$ ويتم الكشف فى جدول التوزيع الطبيعى
المعيارى عن هذه القيمة

∴ الإحتمال = ٨٧٩ ,

(ج) إحتمال أن تتراوح الخسارة بين ٦٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ جنيهاً

$$= K(10000) - K(6000)$$

$$U = \frac{7,83.015 - 10000}{,74.2}$$

$$= \frac{7,83.015 - 9,21.34.4}{,74.2}$$

$$= 1,86$$

$$H(1,86) = 96856 ,$$

$$٠.٠٠٠٠٠٠ (د) - ٠.٠٠٠٠٠٠ (د) = ٠.٠٠٠٠٠٠ (د) - ٠.٠٠٠٠٠٠ (د) = ٠.٠٠٠٠٠٠ (د)$$

$$٠.٠٠٠٠٠٠ (د) =$$

$$(د) \text{ احتمال أن تزيد قيمة الخسارة عن } ٠.٠٠٠٠٠٠ (د) = ٠.٠٠٠٠٠٠ (د) - ٠.٠٠٠٠٠٠ (د)$$

$$٠.٠٠٠٠٠٠ (د) - ٠.٠٠٠٠٠٠ (د) =$$

$$٠.٠٠٠٠٠٠ (د) =$$

التوزيع الأسى السالب: distribution Negative exponential

تأخذ دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الأسى السالب الشكل الآتى:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

$$\frac{1}{\lambda} = \text{المتوسط}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \text{التباين}$$

كما تأخذ دالة التوزيع (دالة الاحتمال التجميعية أو التراكمية) الشكل الآتى:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

والمثال التالى يوضح كيفية الإستفادة من هذا التوزيع فى الحياة العملية.

مثال (٢):

إذا علمت أن قيم الخسائر فى فرع تأمين الحريق تتبع التوزيع الأسى السالب بمتوسط

قدر ٣٣٠٩,٢١١ جنيهاً إحصاء :

- أ- إحتمال أن قيمة الخسارة الواحدة تكون في حدود ٢٠٠٠ جنيهاً
 ب- إحتمال أن قيمة الخسارة الواحدة تكون في حدود ٦٠٠٠ جنيهاً
 ج- إحتمال أن قيمة الخسارة الواحدة تكون في حدود ١٠٠٠٠ جنيهاً
 د - إحتمال أن قيمة الخسارة الواحدة تتراوح بين ٦٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ جنيهاً
 هـ- إحتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ١٠٠٠٠ جنيهاً

الحل:

$$\frac{1}{y} = \text{المتوسط} .$$

$$\frac{1}{y} = ٣٣.٩, ٢١١ .$$

$$٠.٠٠٣٠٢١٩ = y$$

$$٠.٠٠٣٠٢١٩ = (١ - y) = ١ - y$$

- أ- إحتمال أن قيمة الخسارة تكون في حدود ٢٠٠٠ جنيهاً = د (٢٠٠٠)

$$٠.٠٠٣٠٢١٩ - ١ = (٢٠٠٠) د ،$$

$$٠.٠٠٣٠٢١٩ - ١ =$$

$$٠.٠٠٣٠٢١٩ - ١ =$$

$$٠.٠٠٣٠٢١٩ =$$

- ب- إحتمال أن قيمة الخسارة تكون في حدود ٦٠٠٠ جنيهاً = د (٦٠٠٠)

$$٠.٠٠٣٠٢١٩ - ١ = (٦٠٠٠) د$$

$$٠.٠٠٣٠٢١٩ - ١ =$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = \text{وتباين التوزيع}$$

$$\frac{y}{\beta} = \text{وتباين التوزيع}$$

حيث y ، β هما معلمتا التوزيع ، $\lceil y \rceil$ تتوقف على قيمة y :

$$\lceil y \rceil = \lceil (1-y) \rceil \text{ فإذا كانت } y \text{ رقماً صحيحاً فإن}$$

وإذا كانت y رقماً كسرياً أو رقماً صحيحاً وكسر فإن لها جداول خاصة كما تأخذ دالة التوزيع الشكل التالي:

$$D(s) = \int_0^s \frac{\beta}{\Gamma(y)} e^{-\beta x} (1-x)^{\beta-1} dx \quad s \leq \beta$$

وهذا التكامل المحدود ليس من السهل إيجاد قيمته بالطرق المعروفة للتكامل ولكن توجد جداول خاصة عند قيم مختلفة لكل من β ، y وتسمى جداول التكاملات المحدودة لدالة جاما Incomplete Gamma Function tables .

ونظراً لعدم توافر هذه الجداول فإنه توجد طريقة تقريبية يمكن من خلالها إيجاد قيمة هذا التكامل وهي:

$$D(s) = \frac{1}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta^r}{r!} \frac{(1-s)^{\beta-r}}{r} \quad \text{عند } s > \beta$$

عند $s > \beta$

$$D(s) = 1 - \frac{1}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta^r}{r!} \frac{(1-s)^{\beta-r}}{r} \quad \text{أو } D(s) = 1 - \frac{1}{\beta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\beta^r}{r!} \frac{(1-s)^{\beta-r}}{r}$$

عند $s \leq \beta$

$$\text{حيث } \sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sigma^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right)$$

$$\sigma = 196854$$

$$\sigma = 115194$$

$$\sigma = 344000$$

$$\sigma = 19527$$

والمثال التالي يوضح كيفية تطبيق المعادلة السابقة:

مثال (٣):

إذا علمت أن قيمة الخسارة في فرع التأمين من السطو تتبع توزيع جاما وذلك بمتوسط

$$79899.7 \text{ جنيهاً وتباين } 33.9$$

احسب الاحتمالات الآتية:

أ- أن تكون الخسارة في حدود 2000 جنيهاً

ب- أن تكون الخسارة في حدود 6000 جنيهاً

ج- أن تتراوح قيمة الخسارة بين 6000 ، 10000 جنيهاً

د- أن تزيد قيمة الخسارة عن 10000 جنيهاً

الحل:

$$\frac{\sigma}{\beta} = \text{المتوسط}$$

$$\frac{U}{\beta^2} = \text{التباين} ,$$

$$\frac{U}{\beta} = ٣٣٠٩,٢١١ .٠٠$$

$$\frac{U}{\beta^2} = ٧٩٨٩٩.٧ ,$$

وبقسمة المعادلة الأولى على المعادلة الثانية ينتج أن:

$$\frac{\beta^2}{U} \times \frac{U}{\beta} = \frac{٣٣٠٩,٢١١}{٧٩٨٩٩.٧}$$

$$\beta .٠٠ = ٤١٤١٧,٠٠٠ \text{ وبالتعويض بقيمة } \beta \text{ فى معادلة المتوسط}$$

$$\frac{U}{٤١٤١٧,٠٠٠} = ٣٣٠٩,٢١١ .٠٠$$

$$١,٣٧٠.٥٨٨٤٨ = U .٠٠$$

وبالتعويض بقيمتى U ، β فى المعادلة التقريبية للتكامل ينتج أن :

$$٠.٠٠ \text{ ع (س) } = ٣ \times \frac{1}{\beta} (\text{س}) + \frac{1}{\sqrt{U}} (١ - ٩ \times)$$

(أ) إحتمال أن تكون الخسارة فى حدود ٢٠٠٠ جنيهاً = ص [ع (٢٠٠٠)]

$$\frac{1}{\sqrt{U}} (٢٠٠٠ \times , ٤١٤١٧) \times \frac{1}{\beta} (١,٣٧٠.٥٨٨٤٨) \times ٣ = (٢٠٠٠) \text{ ع } .٠٠$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[3]{1.37.08848 \times 9 - 1}}$$

$$= 3,2274393.6 - 93910093910073 \times 3,618344 =$$

$$= -207984444, > \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ص} [ع (س)] = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) \text{ ب ر } / ع (س) / \text{ص} -$$

$$\therefore \text{ص} [ع (2000)] = \frac{1}{2} [1 + (196804 \times 2079844) + 1]$$

$$115194 \times (2079844) + 344.000$$

$$- [(2079844 \times 19027 + (2079844) \times$$

$$= 398229000$$

(ب) احتمال أن تكون الخسارة في حدود 6000 جنيهاً = ص [ع (6000)]

$$\text{ص} [ع (6000)] = 8541331$$

(ج) احتمال أن قيمة الخسارة تتراوح بين 6000 ، 10000 جنيهاً =

$$\text{ص} [ع (10000)] - \text{ص} [ع (6000)]$$

$$\text{ص} [ع (10000)] = 968.93217$$

$$\text{ص} [ع (6000)] = 8541331$$

... احتمال أن تتراوح الخسارة بين 6000 ، 10000 =

$$1139799.7 = 8541331 - 968.93217$$

(د) احتمال أن تزيد قيمة الخسارة عن ١٠٠٠٠ جنيهاً = ١ - ص [ع (١٠٠٠٠)]

$$= ١ - ٩٦٨.٩٣٢١٧ ر$$

$$= ٠.٣١٩.٦٧٨٣ ر$$

توزيع باريتو: Pareto distribution

تأخذ دالة كثافة الاحتمال لتوزيع باريتو الشكل التالي:

$$د (س) = \frac{\beta}{\beta + 1} \left(\frac{\beta}{س} \right)^{\beta + 1} \quad , س < \beta$$

$$\text{حيث متوسط التوزيع} = \frac{\beta}{\beta - 1}$$

$$, \text{تباين التوزيع} = \frac{\beta}{\beta - 2} - \left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right)^2$$

كما تأخذ دالة التوزيع الشكل التالي:

$$د (س) = 1 - \left(\frac{\beta}{س} \right)^{\beta} \quad , س < \beta$$

وهو من التوزيعات الملتوية جهة اليمين Positive skewed

ويستخدم هذا التوزيع في تحديد تكلفة إتفاقيات عمليات إعادة التأمين وخاصة ماجاوز

حداً من الخسارة نظراً لأن زيل التوزيع لا يقترب من المحور الأفقى بسرعة كبيرة كما في

التوزيع اللوغاريتمى الطبيعي.

ويشترط لوجود المتوسط أن تكون y أكبر من واحد ويشترط لوجود التباين أن تكون y أكبر من ٢ وهذه القيود تعنى أنه فى الحياة العملية يصعب إستخدامه فى حالات كثيرة ولذا يفضل عليه التوزيع اللوغاريتمى الطبيعى.

والأمثلة التالية توضح كيفية الإستفادة من هذا التوزيع فى حساب الإحتمالات المختلفة .

مثال (٤):

إذا علمت أن الخسائر الخاصة بفرع السيارات تتبع توزيع باريتو بمعلمتين:

$y = 3$ ، $\beta = 2000$ إحسب إحتمال أن قيمة الخسارة فى هذا الفرع تزيد عن ٥٠٠٠ جنية .

الحل:

أ- حيث أن الخسائر فى هذا الفرع تتبع توزيع باريتو فإن دالة التوزيع هى:

$$D(s) = 1 - \left(\frac{\beta}{s} \right)^y , \quad s > \beta$$

ويوضع $\beta = 2000$ ، $y = 3$ فإن:

إحتمال أن تزيد قيمة الخسارة عن ٥٠٠٠ جنيهاً $= 1 - D(5000)$

$$D(5000) = 1 - \left(\frac{2000}{5000} \right)^3$$

$$= 1 - 0.64$$

$$= 0.36$$

$$1 - 0.36 = 0.64$$

$$= 0.64$$

مثال (٥):

إذا علمت أن الخسائر الخاصة بفرع السطو تتبع توزيع باريتو وتأخذ دالة التوزيع الشكل التالي:

$$د(س) = 1 - \left(\frac{1700}{س} \right)^2, \quad س < 1700$$

احسب الاحتمالات الآتية:

أ- أن قيمة الخسائر تكون في حدود ٤٠٠٠ جنيهاً

ب- أن قيمة الخسائر تزيد عن ١٠٠٠٠ جنيهاً

ج- أن قيمة الخسائر تتراوح بين ٤٠٠٠، ١٠٠٠٠ جنيهاً

الحل:

$$٠.٠ د(س) = 1 - \left(\frac{1700}{س} \right)^2$$

٠.٠ احتمال أن قيمة الخسارة تكون في حدود ٤٠٠٠٠ جنيهاً = د(٤٠٠٠)

$$د(٤٠٠٠) = 1 - \left(\frac{1700}{٤٠٠٠} \right)^2$$

$$= 1 - ١٨.٦٢٥$$

$$= ٨١.٩٣٧٥$$

(ب) احتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ١٠٠٠٠ جنيهاً = ١ - د(١٠٠٠٠)

$$د(١٠٠٠٠) = 1 - \left(\frac{1700}{١٠٠٠٠} \right)^2$$

$$= ١ - ٠.٢٨٩$$

$$= ٩٧.١١$$

$$١٠٠٠ - ١ = (١٠٠٠٠) \text{ ر} - ١ = ٩٧١١ \text{ ر}$$

$$= ٢٨٩ \text{ ر}$$

(ج) إحتمال أن تتراوح قيمة الخسارة بين ٤٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ جنيهاً

$$= (١٠٠٠٠) \text{ ر} - (٤٠٠٠) \text{ ر} = ٩٧١١ \text{ ر} - ١٩٣٧٥ \text{ ر}$$

$$= ١٥١٧٢٥ \text{ ر}$$

أسئلة على الوحدة الدراسية العاشرة

(١) إذا علمت أن قيمة الخسارة فى فرع الحريق تتوزع طبقاً للتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى بمتوسط ٢٠٠٠ جنيهاً وتباين ٢٨٩٠٠٠٠ إحسب الإحتمالات الآتية:

أ- أن تكون الخسارة فى حدود ١٤٠٠ جنيهاً

ب- أن تكون الخسارة فى حدود ٥٠٠٠ جنيهاً

ج- أن تتراوح قيمة الخسارة بين ٤٠٠٠ ، ٧٠٠٠ جنيهاً

د- أن تزيد قيمة الخسارة عن ٦٥٠٠ جنيهاً

(٢) فيما يلى بيان عن توزيع قيم الخسائر خلال عام ١٩٩٠ فى فرع الحريق بشركة مصر للتأمين :

فئة الخسارة	صفر-	-٣٠٠٠	-٦٠٠٠	-٩٠٠٠	-١٢٠٠٠	-١٥٠٠٠	١٨٠٠٠-٢١٠٠٠
عدد الخسائر	٤٦٥	٤٣٠	١٧٠	٧٢	٣١	١٦	٦

فإذا علمت أن توزيع قيم الخسائر قريب جداً من التوزيع اللوغاريتمى الطبيعى

إحسب: أ- إحتمال أن قيمة الخسارة تقل عن ١٥٠٠ جنيهاً

ب- إحتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ١٣٠٠٠ جنيهاً

ج- إحتمال أن قيمة الخسارة تتراوح بين ٦٥٠٠ ، ١١٥٠٠ جنيهاً

(٣) إذا علمت أن قيمة الخسارة تتبع التوزيع الأسى السالب بمتوسط ٢٠٠٠ جنيهاً وتباين ٢٨٩٠٠٠٠ إحسب الإحتمالات الآتية:

أ- أن تكون الخسارة فى حدود ١٤٠٠ جنيهاً

ب- أن تكون الخسارة فى حدود ٥٠٠٠ جنيهاً

ج- أن تتراوح قيمة الخسارة بين ٤٠٠٠ ، ٧٠٠٠ جنيهاً

د- أن تزيد قيمة الخسارة عن ٦٥٠٠ جنيهاً.

(٤) فيايلي بيان عن توزيع خسائر فرع السطوب بشركة مصر للتأمين خلال عام ١٩٩٠ حسب القيمة:

فئة الخسارة	صفر-	-٤٠٠٠	-٨٠٠٠	-١٢٠٠٠	-١٦٠٠٠	-٢٠٠٠٠	٢٨٠٠٠-٢٤٠٠٠
عدد الخسائر	٩٧٠	٧٢٠	٣٨٠	١٨٠	٨٥	٤١	١٩

فإذا علمت أن التوزيع السابق قريب جداً من توزيع جاما إحسب:

أ- إحتمال أن تزيد قيمة الخسارة عن ١١٠٠٠ جنيهاً

ب- إحتمال أن تقل قيمة الخسارة عن ١٣٠٠٠ جنيهاً

ج- إحتمال أن تتراوح قيمة الخسارة بين ١٣٠٠٠ ، ١٥٠٠٠ جنيهاً

(٥) إذا علمت أن الخسائر الخاصة بفرع المسئولية تتبع توزيع باريتو، وتأخذ دالة التوزيع الشكل التالي:

$$د(س) = ١ - \left(\frac{١٨٠٠}{س}\right)^٣$$

إحسب:

أ- إحتمال أن قيمة الخسارة تقل عن ٤٥٠٠ جنيهاً

ب- إحتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ٦٠٠٠ جنيهاً

ج- إحتمال أن قيمة الخسارة تتراوح بين ٥٠٠٠ ، ٧٠٠٠ جنيهاً

(٦) إذا علمت أن الخسائر الخاصة بفرع المسئولية تتبع توزيع باريتو بمعلمتين $\alpha = ٢$ ، $\beta = ١٥٠٠$ إحسب:

أ- إحتمال أن قيمة الخسارة تزيد عن ٣٥٠٠ جنيهاً

ب- إحتمال أن تتراوح قيمة الخسارة بين ٢٥٠٠ ، ٥٥٠٠ جنيهاً

الوحدة الدراسية الحادية عشرة
توفيق توزيع احتمالي نظري
مناسب للتوزيع الاحتمالي الفعلي
لعدد الحوادث واختبار
جودة التوفيق

الوحدة الدراسية الحادية عشرة

موضوعها : توفيق توزيع إحتمالى نظرى مناسب للتوزيع الاحتمالى الفعلى لعدد الحوادث وإختبار جودة التوفيق .

هدفها : تعريف الدارس بكيفية تحديد التوزيع الاحتمالى النظرى المناسب للتوزيع التكرارى الفعلى لعدد الحوادث .

عناصرها :

- طرق تقدير معالم التوزيع بنقطة :

- طريقة المربعات الصغرى .

- طريقة دالة الإمكان الأعظم .

- طريقة العزوم .

- إختبار كاي^٢ لجودة التوفيق .

- إختبار سميرنوف كـموجروف .

طرق تقدير معالم التوزيع بنقطة :

نحتاج فى حالات كثيرة أن نحدد التوزيع الإحتمالى النظرى الأمثل والمناسب لتوزيع إحتمالى (أو تكرارى) فعلى معلوم ، ذلك أن تحديد التوزيع الإحتمالى النظرى يتميز بتلخيص جميع البيانات المتعلقة بالتوزيع الفعلى فى دالة رياضية واحدة يمكن من خلالها حساب جميع الاحتمالات (أو التكرارات) المناظرة لقيمة معينة (أو أقل أو أكبر منها) من قيم المتغير العشوائى ، بل يمكن حساب الاحتمالات خارج نطاق القيم الفعلية للمتغير العشوائى ومثال على ذلك فإن التوزيع التكرارى لقيم الخسائر الفعلية قد ينتهى عند الفئة ٢٠٠٠٠ - ٣٠٠٠٠ جنيه وهذا يعنى أن أقصى قيمة للخسائر هى ٣٠٠٠٠ جنيه على الرغم من أن هناك إحتمال أن تزيد الخسائر الفعلية عن هذه القيمة ومع هذا فإن التكرار الفعلى المناظر للخسائر التى تزيد عن ٣٠٠٠٠ جنيه هو صفر وبالتالي فإن إحتمالها صفر ولكن بإستخدام التوزيع النظرى يمكن حساب إحتمال أن تزيد الخسائر عن ٣٠٠٠٠ جنيه (لأن المنحنى يكون ممهداً) وتكون له قيمة .

ولتحديد التوزيع النظرى المناسب للتوزيع الفعلى فلا بد من تقدير معالم التوزيع ، فلكل توزيع معلمة على الأقل ويتم تقدير هذه المعالم من خلال تحديد هذه المعالم للتوزيع الفعلى وبمساواتها بمعالم التوزيع النظرى يمكن تحديد الاحتمالات النظرية ومنها يتم حساب التكرارات النظرية وإختبار مدى تطابقها مع التكرارات الفعلية وبالتالي إتخاذ قرار بالنسبة للفرض الخاص بمدى تطابق التوزيع النظرى محل الاختبار مع التوزيع الفعلى ، وطالما أننا سوف نقدر المعالم الخاصة بالتوزيع بقيمة وحيدة فإننا سوف نتعرض لطرق التقدير بنقطة Point estimation methods والتى من أهمها:

١- طريقة المربعات الصغرى: Least square method

تعتمد هذه الطريقة على تقدير المعلمة أو المعالم المجهولة والتى تؤدى إلى أن يكون الفرق بين البيانات الفعلية والبيانات النظرية المحسوبة بإستخدام المعالم المقدرة أقل مايمكن ، ويتم حل معادلتين أو أكثر معاً (حسب عدد المعالم المجهولة) ومنها يتم تقدير المعالم المجهولة .

٢- طريقة دالة الامكان الاعظم Maximum likelihood method

تعتمد هذه الطريقة على استخدام التقدير الذى يعظم إمكانية الحدث المشاهد أو الملاحظ ولذلك فإننا نبحث عن التقدير من العينة الذى يجعل دالة الامكان الاعظم فى نهايتها العظمى .

٣- طريقة العزوم: Method of moments

تعتمد هذه الطريقة على حساب العزمين الأول والثانى (أو العزوم الثلاثة الأولى إذا كان عدد المعالم ثلاثة) من البيانات الفعلية ومساواتهما بالعزمين الأول والثانى النظريين ومن خلال حل المعادلات النظرية الخاصة بالعزوم يتم الحصول على قيم معالم التوزيع .

وأكثر الطرق شيوعاً فى الاستخدام طريقة العزوم ثم طريقة دالة الامكان الاعظم (وإن كانت دالة الامكان الأعظم أكثر دقة) وسوف نعتمد على طريقة العزوم لتقدير المعالم المجهولة للتوزيعات .

وبعد تقدير معالم التوزيع النظرى المجهولة تستخدم فى حساب الاحتمالات وبالتالى التكرارات المناظرة لكل قيمة (أو فئة) من قيم المتغير العشوائى ولكن ماهى أداة الاختبار المستخدمة فى تحديد مدى مطابقة التوزيع النظرى للتوزيع الفعلى ؟ يمكن القول أن هناك أداتان يمكن إستخدامهما فى تحديد مدى مطابقة التوزيع النظرى للتوزيع الفعلى (جودة التوفيق) وهما :

أولاً- إختبار كا^٢ لجودة التوفيق :

Chi-square (X^2) test for goodness of fit

يستخدم إختبار كا^٢ للمقارنة بين التوزيع التكرارى النظرى أو المتوقع والتوزيع التكرارى المشاهد أو الفعلى وتحديد ما إذا كان هناك فرقاً بينهما أم لا ، وبمعنى آخر فإنه بإستخدام إختبار كا^٢ يمكن تحديد ما إذا كان الفرق الظاهر بين التوزيعين هو فرقاً معنوياً أم

هو فرقاً راجعاً للصدفة والأمثلة التالية توضح كيفية استخدام هذا الاختبار .

مثال (١) :

فيما يلي بيان عن عدد وثائق تأمين السيارات التكميلي (بالآلف) فى مجموعة من شركات التأمين المصرية خلال عام ١٩٩٠ :

الشركة	مصر	الشرق	الأهلية	المهندس	الدلتا	قناة السويس
عدد الوثائق	١٢٥	١٤٥	٨	٧	٨٥	٩٥

إختبر صحة الفرض القائل بأن عدد الوثائق يتبع التوزيع المنتظم .

الحل:

لتوفيق منحنى منتظم يمثل هذه البيانات فإننا نفترض نظرياً أن عدد الوثائق فى كل شركة متساو مع عد الوثائق فى الشركات الأخرى أى أن

$$\text{عدد الوثائق فى كل شركة} = \frac{\text{عدد الوثائق الاجمالى}}{\text{عدد الشركات}} = \frac{٦٠}{٦} = ١٠$$

أى أن التوزيع النظرى هو

الشركة	مصر	الشرق	الأهلية	المهندس	الدلتا	قناة السويس
عدد الوثائق	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠

ولتطبيق توزيع كا^٢ فإنه هناك مجموعة من الشروط لابد من توافرها ومن أهمها:

أ - أن تكون المشاهدات مستقلة عن بعضها البعض .

ب- أن يكون مجموع التكرارات كبيراً جداً (أكبر من ٣٠) .

ج- أن يكون التكرار المتوقع المناظر لكل خلية يساوى أو أكبر من ٥ (ويفضل أن يساوى ١٠) وفى حالة عدم توافر هذا الشرط يمكن إدماج فئتين أو أكثر معاً .

وفى حالة توافر هذه الشروط فإن المتغير : $\chi^2 = \frac{(\text{التكرار المشاهد} - \text{التكرار المتوقع})^2}{\text{التكرار المتوقع}}$

يتبع توزيع χ^2 بدرجات حرية (ن-١) ودرجة ثقة معينة ، فإذا كانت χ^2 الجدولية ر من χ^2 المحسوبة فإنه لا يوجد فرق بين التوزيع النظرى والتوزيع الفعلى والعكس صحيح
جدول التالى يوضح خطوات حساب χ^2 المحسوبة :

جدول رقم ١

الشركة	التكرار المشاهد	التكرار المتوقع	المشاهد - المتوقع	$\chi^2 = \frac{(\text{المشاهد} - \text{المتوقع})^2}{\text{المتوقع}}$
مصر	١٢٥	١٠	٢٥	٠.٦٢٥
الشرق	١٤٥	١٠	٤٥	٢.٠٢٥
الأهلية	٨	١٠	-٢	٠.٤
المهندس	٧	١٠	-٣	٠.٩
الدلتا	٨٥	١٠	-١٥	٠.٢٢٥
قناة السويس	٩٥	١٠	-٥	٠.٠٢٥
المجموع	٦٠	٦٠	صفر	٤.٢

∴ كا^٢ المحسوبة = ٤ر٢ .

، كا^٢ الجدولية (٥ ، ٥٪) = ١١ر١ .

وحيث أن كا^٢ الجدولية أكبر من المحسوبة فإننا نقبل الفرض القائل بأن عدد الوثائق يتبع التوزيع المنتظم .

مثال (٢) :

فيما يلي بيان عن عدد الخسائر في فرع السيارات بإحدى شركات التأمين خلال عام

١٩٩٠ .

عدد الخسائر	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الوثائق	٤٨٦	٣٨٢	١١٣	١٧	١

إختبر الفرض القائل بأن عدد الخسائر في هذه الشركة يتبع ربيع ذي الحدين

الحل:

للتحقق من هذا الفرض فإنه لابد من الحصول على التكرارات النظرية بإستخدام توزيع ذي الحدين والحصول على التكرارات النظرية لابد من الحصول على معالم التوزيع ، وحيث أن توزيع ذي الحدين توزيع ذي معلمة واحدة فإننا لانحتاج إلا إلى العزم الأول الفعلى (المتوسط) ويتم حسابه من البيانات السابقة كما يلي :

جدول رقم ٢

عدد الخسائر \times عدد الوثائق س \times ك	عدد الوثائق ك	عدد الخسائر س
صفر	٤٨٦	صفر
٢٨٢	٢٨٢	١
٢٢٦	١١٣	٢
٥١	١٧	٣
٨	٢	٤
٦٦٧	١٠٠٠	المجموع

$$\bar{s} = \frac{\text{مح س ك}}{\text{مح ك}}$$

$$\bar{s} = \frac{٦٦٧}{١٠٠٠} = ٠.٦٦٧$$

وبمساواة المتوسط الفعلى \bar{s} بالمتوسط النظرى μ وحيث أن :

$$\mu = \bar{s}$$

$$\mu = \bar{s} \times L$$

$$\bar{s} = \bar{s} \times L$$

$$\bar{s} = \bar{s} \times L$$

$$\bar{s} = \bar{s} \times L$$

$$\bar{s} = \bar{s} \times L$$

$$\bar{s} = \bar{s} \times L$$

∴ دالة توزيع ذى الحدين هى $K(s) = \binom{L}{s} \bar{s}^s (1-\bar{s})^{L-s}$

وبوضع $\sim = ٤$ ، $ل = ١٦٦٧٥$ ، $ل - ١ = ٨٣٣٢٥$

وبالتعويض عن س = صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نحصل على :

س :	صفر	١	٢	٣	٤
$\sum (س) :$	٤٨٢ر	٣٨٦	١١٦ر	١٥ر	٠٠١ر

وبضرب هذه الاحتمالات في العدد الكلى للوثائق وهو ١٠٠٠ نحصل على التكرار النظرى المناظر لكل قيمة من قيم المتغير العشوائى س وهو (عدد الخسائر) والموضح فيما يلى :

عدد الخسائر	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الوثائق	٤٨٢	٣٨٦	١١٦	١٥	١	١٠٠٠

ثم يتم حساب قيمة χ^2 من خلال الجدول التالى

جدول رقم ٣

عدد الخسائر	ك المشاهد	ك النظرى	(ك المشاهد - ك المتوقع)	\sim ك ^٢ المحسوبة
صفر	٤٨٦	٤٨٢	٤	٠.٣
١	٣٨٢	٣٨٦	-٤	٠.٤
٢	١١٣	١١٦	-٣	٠.٨
٣	١٩	١٦	٣	٢٦ر
-	-	-	-	-
المجموع	١٠٠٠	١٠٠٠	صفر	٤١ر.

* ملاحظة : تم دمج التكرارات المناظرة لعدد الخسائر ٣ ، ٤ لأن التكرار المناظر لعدد الخسائر ٤ أقل من ٥ حتى يمكن تطبيق شروط توزيع كا^٢ مع خصم درجة حرية أخرى مقابل عملية الدمج .

$$\therefore \text{كا}^2 \text{ الجدولية [كا}^2 (٢ ، ٥\%) = ٥.٩٩$$

وحيث أن كا^٢ المحسوبة أصغر من الجدولية فإننا نقبل الفرض القائل بأن البيانات الخاصة بعدد الخسائر تتبع توزيع ذي الحدين .

ثانياً: إختبار سميرونوف كيموجروف Kolmogrov Smirnov Test

هذا الاختبار أقوى من إختبار كا^٢ ويفضل تطبيقه دائماً بالاضافة إلى أن هذا الاختبار ليس له أى شروط ويعتمد على مقارنة أكبر فرق مطلق بين الاحتمال التجميى الفعلى والاحتمال التجميى النظرى بقيمة جدولية لجدول يحمل نفس إسم الاختبار والجدول التالى يوضح كيفية تطبيق هذا الاختبار على بيانات المثال السابق :

جدول رقم ٤ إختبار سميرونوف لتوزيع ذي الحدين

الفئة	التكرار الفعلى	التكرار النظرى	الاحتمال التجميى الفعلى	الاحتمال التجميى النظرى	الفرق
صفر	٤٨٦	٤٨٢	ر٤٨٦	ر٤٨٢	٠.٠٤
١	٣٨٢	٣٨٦	ر٨٦٨	ر٨٦٨	-
٢	١١٣	١١٦	ر٩٨١	ر٩٨٤	-٠.٠٣
٣	١٧	١٥	ر٩٩٨	ر٩٩٩	٠.٠١
٤	٢	١	١	١	-

من الجدول السابق يتضح أن أكبر فرق هو ٠.٠٤ وهى تمثل قيمة سميرونوف المحسوبة ويستخرج قيمة سميرونوف الجدولية (والموجودة بالملاحق) المناظرة لحجم العينة

وتحت احتمال معين مع مراعاة أنه في حالة زيادة حجم العينة عن ٣٥ فإن قيمة سميرنوف تساوى $\frac{\text{آخر قيمة في الجدول}}{\sqrt{\text{حجم العينة}}}$

$$\text{ومن الجدول تحت احتمال } ٥\% \text{ نجد أن قيمة سميرنوف} = \frac{١٣٦}{\sqrt{٣١٦٢}} = \frac{١٣٦}{٥٦.٣٤} = ٢.٤٣$$

وحيث أن قيمة سميرنوف الجدولية أكبر من المحسوبة فإننا نقبل الفرض العدمى أى أن توزيع عدد الخسائر يتبع توزيع ذى الحدين .

مثال (٣) :

فيما يلى بيان عن توزيع عدد الوثائق فى شركة مصر للتأمين بفرع الحريق حسب عدد حالات الخسارة خلال عام ١٩٩٠ :

عدد حالات الخسائر	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الوثائق	١٧٥٤٩	١١٠٤	٥٢	٢	صفر

اختبر صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع لتوزيع بواسون

الحل :

تأخذ دالة كثافة الاحتمال لتوزيع بواسون الشكل التالى :

$$P(s) = \frac{e^{-\mu} \times \mu^s}{s!} \quad , \quad s = \text{صفر} , ١ , ٢ , ٣ , \dots \text{ إلى } \infty$$

وحيث أن دالة بواسون لها معلمة واحدة وهى المتوسط μ فإنه يتم حساب المتوسط

الفعلى \bar{s} من البيانات كما يلى :

جدول رقم ٥

عدد الوثائق \times عدد الخسائر س \times ك	عدد الوثائق ك	عدد الخسائر س
صفر	١٧٥٤٩	صفر
١١٠٤	١١٠٤	١
١٠٦	٥٣	٢
٦	٢	٣
صفر	صفر	٤
١٢١٦	١٨٧٠٨	المجموع

$$\therefore \bar{s} = \frac{\text{مجموع س ك}}{\text{مجموع ك}} = \frac{١٢١٦}{١٨٧٠٨} = ٠.٦٥$$

وبمساواة المتوسط الفعلي بالمتوسط النظري .

$$\therefore \mu = ٠.٦٥$$

$$\therefore ك (صفر) = (٢٧١٨٢٨) - (٠.٦٥) = ٩٣٧.٦٧$$

$$\therefore ك (١) = \frac{(٢٧١٨٢٨) - (٠.٦٥ \times ٠.٦٥)}{٠.٦٥} = ٠.٦٠٩٠٩$$

$$\frac{١}{٠.٦٠٩٠٩}$$

$$\therefore ك (٢) = \frac{(٢٧١٨٢٨) - (٠.٦٥) \times (٠.٦٥)}{٠.٦٠٩٠٩} = ٠.٠١٩٨٠$$

$$\frac{٢}{٠.٠١٩٨٠}$$

$$\therefore ك (٣) = \frac{(٢٧١٨٢٨) - (٠.٦٥) \times (٠.٦٥)}{٠.٠١٩٨٠} = ٠.٠٠٠٠٤٣$$

$$\frac{٣}{٠.٠٠٠٠٤٣}$$

$$\therefore ك (٤) = \frac{(٢٧١٨٢٨) - (٠.٦٥) \times (٠.٦٥)}{٠.٠٠٠٠٤٣} = -$$

$$\frac{٤}{-}$$

$$١ =$$

المجموع

ويضرب هذه الاحتمالات \times مجموع التكرارات وهو ١٨٧٠٨ نحصل على التكرارات المناظرة لكل قيمة من قيم الخسائر (التوزيع النظري) وذلك كما يلي :

جدول رقم ٦

عدد الخسائر	الاحتمال	التكرار النظري
صفر	٩٣٧.٦٧ر	١٧٥٣١
١	٠.٦٠٩٠٩ر	١١٢٩
٢	٠.٠١٩٨٠ر	٣٧
٣	٠.٠٠٠٠٤٣ر	١
٤	صفر	صفر
المجموع	١	١٨٧٠٨

ونلاحظ أن تطبيق إختبار كا^٢ يحتاج إلى دمج التكرار المناظر للفئة الرابعة مع الثالثة لأن تكرار الفئة الرابعة أقل من ٥ وهذا يحتاج إلى خصم درجة حرية مقابل عملية الدمج وحيث أن عدد الفئات سيصبح ثلاثة بعد عملية الدمج وأننا سنخصم درجة حرية فإن عدد درجات الحرية المتبقية بعد الخصم ستصبح درجة واحدة (٣-٢=١) وهذا أمر غير منطقي ويضعف من قيمة الاختبار ، ولذلك يفضل تطبيق إختبار سميرنوف كملوجروف والذي يتم حسابه كما يلي :

جدول رقم ٧ إختبار سميرنوف لتوزيع بواسون

الفئة	التكرار الفعلى المتجمع	التكرار النظرى المتجمع	الاحتمال الفعلى المتجمع	الاحتمال النظرى المتجمع	الفرق
صفر	١٧٥٤٩	١٧٥٣١	٩٣٨.٤٨	٩٣٧.٨٦	٠.٠٠٩٦٢
١	١٨٦٥٣	١٨٦٧.٠	٩٩٧.٦٠	٩٩٧٩٦٩	٠.٠٠٩٠٩
٢	١٨٧.٦	١٨٧.٧	٩٩٩٨٩٣	٩٩٩٩٤٦	٠.٠٠٠٥٣
٣	١٨٧.٨	١٨٧.٨	١	١	صفر

ومن الجدول يتضح أن أكبر فرق بين الاحتمال الفعلى المتجمع والاحتمال النظرى المتجمع هو ٠.٠٠٩٦٢

وأن قيمة سميرنوف الجدولية (١٨٧.٨ ، ٥٪) هي ٠.٠٩٩٤٣ .

وحيث أن قيمة سميرنوف المحسوبة أصغر من الجدولية فإننا نقبل الفرض القائل بأن هذه البيانات تتبع توزيع بواسون .

ملاحظة هامة : إستخدمنا فى الحالات السابقة طريقة العزوم لتقدير المعلمة المجهولة ، ويمكن إستخدام طريقة دالة الامكان الأعظم ونحصل على نفس القيم وذلك كما يلى :

حيث أن معدل تكرار الخسارة (المتوسط) باستخدام توزيع بواسون هو μ فإن :

$$\frac{\mu \times \mu - \text{صفر}}{\text{صفر}} = \text{صفر} \quad \text{إحتمال عدم حدوث أى خسارة خلال السنة : (صفر)}$$

$$\frac{\mu \times \mu - 1}{1} = 1 \quad \text{إحتمال حدوث خسارة واحدة خلال السنة : (١)}$$

$$\frac{\mu \times \mu - 2}{2} = 2 \quad \text{إحتمال حدوث خسارتين خلال السنة : (٢)}$$

$$\frac{{}^3\mu \times \mu^-}{3} = (3) \quad \text{إحتمال حدوث ثلاث خلال السنة :}$$

وهكذا ...

∴ إحتمال (إمكانية) أن : ١٧٥٤٩ وثيقة لاتتعرض لأى خسارة

وأن : ١١٠٤ وثيقة تتعرض لخسارة واحدة .

وأن : ٥٣ وثيقة تتعرض لخسارتين .

وأن : ٢ وثيقة تتعرض لثلاث خسائر .

وأن : صفر وثيقة تتعرض لأربع خسائر.

$$\text{وهذا الاحتمال ل} = \left[\frac{{}^0\mu \times \mu^-}{\text{صفر}} \right] \times ١٧٥٤٩ \times \left[\frac{{}^1\mu \times \mu^-}{1} \right] \times ١١٠٤$$

$$\times \left[\frac{{}^2\mu \times \mu^-}{2} \right] \times ٥٣ \times \left[\frac{{}^3\mu \times \mu^-}{3} \right] \times ٢ \times \left[\frac{{}^4\mu \times \mu^-}{4} \right] \times \text{صفر}$$

$$= \frac{{}^0\mu \times \mu^- (١٧٥٤٩ \times \text{صفر} + ١ \times ١١٠٤ + ٢ \times ٥٣ + ٣ \times ٢ + ٤ \times \text{صفر})}{٢ \times ٥٣ \times ٣٦}$$

$$= \frac{{}^0\mu \times \mu^- ١٢١٦}{١٣١٠ \times ٤٢٠٢٣٩٨٧}$$

وطبقاً لطريقة الإمكان الأعظم يتم إختيار قيمة μ التى تعظم قيمة ل ويتم ذلك كما يلى:

بأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج أن :

$$\text{لول} = {}^0\mu + ١٢١٦ \text{ لو} - {}^0\mu - ٤٧٤٨٧٣٥٧$$

وعند نقطة النهاية العظمى فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة تساوى صفر ، أى أن

$$\frac{dL}{d\mu} = 187.8 + \frac{1216}{\mu} = 0 \text{ صفر} .$$

$$\therefore 187.8 = \frac{1216}{\mu}$$

$$\therefore \mu = \frac{1216}{187.8} = 6.5 \text{ ر تقريباً}$$

وهى نفس النتيجة السابق التوصل إليها باستخدام طريقة العزوم .

مثال (٤) :

إختبر صحة الفرض القائل بأن البيانات الخاصة بالمثال السابق تخضع لتوزيع ذى

الحدين السالب .

الحل:

تأخذ دالة كثافة الاحتمال لتوزيع ذى الحدين السالب الشكل التالى :

$$f(s) = \frac{(1-r)^{s-1}}{s} \quad (1-r)^{s-1}$$

حيث s هى متغير عشوائى يأخذ القيم الصحيحة : صفر ، ١ ، ٢ ، ... إلى ∞

، r ، L هما معلمتا التوزيع

$$\text{، المتوسط } \mu = \frac{(1-r)^L}{r}$$

$$\text{، التباين } \sigma^2 = \frac{(1-r)^L}{r^2}$$

وهذا يعنى أننا نحتاج إلى حساب المتوسط μ والتباين σ^2 الفعليين ونساويهما

بالتوسط والتباين النظريين وبحل هاتين المعادلتين نحصل على قيمتى r ، L كما يلى :

جدول رقم ٨

عدد الخسائر س	عدد الوثائق ك	س ك	س ^٢ ك
صفر	١٧٥٤٩	صفر	صفر
١	١١٠٤	١١٠٤	١١٠٤
٢	٥٣	١٠٦	٢١٢
٣	٢	٦	١٨
٤	صفر	صفر	صفر
المجموع	١٨٧٠٨	١٢١٦	١٣٣٤

$$\bar{s} = \frac{\text{محد س ك}}{\text{محد ك}} = \frac{١٢١٦}{١٨٧٠٨} = ٠.٦٥$$

$$s^2 = \frac{\text{محد س ك} - \frac{(\text{محد س ك})^2}{\text{محد ك}}}{\text{محد ك} - ١}$$

$$s^2 = \frac{\frac{١٢١٦^2}{١٨٧٠٨} - ١٣٣٤}{١٨٧٠٨ - ١} = ٠.٦٧١$$

وبمساواة المتوسط والتباين الفعليين بالمتوسط والتباين النظريين ينتج أن :

$$(١) \quad \frac{r(J-1)}{J} = ٠.٦٥$$

$$(٢) \quad \frac{r(J-1)}{٢J} = ٠.٦٧١$$

وبقسمة المعادلة رقم (١) على المعادلة رقم (٢) ينتج أن :

$$\frac{٢J}{(J-1)r} \times \frac{r(J-1)}{J} = \frac{\bar{s}}{s_E}$$

$$J = \frac{٠.٦٥}{٠.٦٧١} \quad \therefore J = ٩٦٨٩$$

وبالتعويض في معادلة (١) بقيمة ل :

$$\frac{r(٩٦٨٩-1)}{٩٦٨٩} = ٠.٦٥$$

$$\therefore r = ٢٠.٢٥$$

وحيث أن قيمتي r ، J بهما كسور فإنه يصعب استخدام المعادلة السابقة الخاصة بكثافة الاحتمال إلا أنه توجد علاقة هامة يمكن من خلالها الحصول على الاحتمالات المختلفة وهي :

$$K(صفر) = J \cdot r$$

$$K(١) = K(صفر) \times r(J-1)$$

$$\frac{K(١)(١+r)(J-1)}{٢} = K(٢)$$

$$\frac{(J-1)(2+J)(2)K}{2} = (2)K,$$

$$\frac{(J-1)(1-n+J)(1-\sim)}{\sim} = (\sim)K,$$

وبالتعويض بقيمة ل ، ر ، س في هذه العلاقة نحصل على

$$K(\text{صفر}) = (9689) \times 20.25 = 938.26$$

$$K(1) = 938.26 \times 20.25 \times 0.311 = 59.75$$

$$K(2) = \frac{59.75 \times 20.25 \times 0.311}{2} = 2779$$

$$K(3) = \frac{2779 \times 20.25 \times 0.311}{3} = 116$$

$$K(4) = \frac{116 \times 20.25 \times 0.311}{4} = 40$$

وبضرب الاحتمالات السابقة في مجموع التكرارات وهو ١٨٧٠.٨ نحصل على

التكرارات النظرية المناظرة لكل فئة وهي :

عدد الخسائر	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الوثائق	١٧٥٤٩	١١٠٥	٥٢	٢	صفر	١٨٧٠.٨

والجدول التالى يوضح التكرارات والاحتمالات الفعلية والنظرية المتجمعة واللازمة
لحساب إختبار جودة التوفيق .

جدول رقم ٩ طريقة حساب إختبار كولوجروف سميرنوف

لتوزيع ذى الحدين السالب

الفئة	التكرار الفعلى المتجمع	التكرار النظرى المتجمع	الاحتمال الفعلى المتجمع	الاحتمال النظرى المتجمع	الفرق
صفر	١٧٥٤٩	١٧٥٤٩	٩٣٨٠٤٨ر	٩٣٨٠٢٦ر	٢٢٠٠٠٠ر
١	١٨٦٥٣	١٨٦٥٤	٩٩٧٠٦٠ر	٩٩٧١٠١ر	٤١٠٠٠٠ر
٢	١٨٧٠٦	١٨٧٠٦	٩٩٩٨٩٣ر	٩٩٩٨٧٩ر	١٤٠٠٠٠ر
٣	١٨٧٠٨	١٨٧٠٨	١ر	١ر	—

ومن الجدول السابق يتضح أن أكبر فرق هو ٤١٠٠٠٠ر وحيث أن قيمة سميرنوف
الجدولية هى :

$$٠٠٩٩٤٣ر = \frac{١٣٦}{\sqrt{١٨٧٠٨}} = (٥٠\% , ١٨٧٠٨)$$

وحيث أن قيمة سميرنوف المحسوبة أصغر من الجدولية فإننا نقبل الفرض القائل بأن
هذه البيانات تخضع لتوزيع ذى الحدين السالب .

أسئلة على الوحدة الدراسية الحادية عشرة

(١) فيما يلي بيان عن توزيع عينة من ١٠٠٠٠٠ وثيقة حريق حسب عدد الخسائر خلال السنة :

عدد الخسائر	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الوثائق	٨٨٥٨٥	١٠٥٧٧	٧٧٩	٥٤	٤	١

إختبر صحة الفرض القائل بأن :

أ- هذه البيانات تخضع لتوزيع ذي الحدين .

ب- هذه البيانات تخضع لتوزيع ذي الحدين السالب .

ج- هذه البيانات تخضع لتوزيع بواسون .

(٢) فيما يلي بيان عن توزيع عينة من ٤٠٠٠ وثيقة سطو حسب عدد الخسائر خلال السنة .

عدد الخسائر	صفر	١	٢	٣
عدد الوثائق	٣٢٨٨	٦٤٢	٦٦	٤

إختبر صحة الفرض القائل بأن :

أ- هذه البيانات تخضع لتوزيع بواسون .

ب- هذه البيانات تخضع لتوزيع ذي الحدين السالب .

**الوحدة الدراسية
الثانية عشرة**

**توفيق توزيع احتمالي نظري مناسب
للتوزيع الاحتمالي الفعلي لقيمة
الخسارة واختيار جودة التوفيق**

الوحدة الدراسية الثانية عشرة

موضوعها:

توفيق توزيع إحتمالى نظرى مناسب للتوزيع الاحتمالى الفعلى لقيمة الخسارة
وإختبار جودة التوفيق

هدفها:

تعريف الدارس بكيفية توفيق توزيع إحتمالى نظرى مناسب للتوزيع الاحتمالى
الفعلى لقيمة الخسارة والتأكد من ذلك من خلال إجراء إختبار جودة التوفيق.

عناصرها:

- إختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع للتوزيع الطبيعى .
- إختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع للتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى .
- إختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع للتوزيع الأسى. السالب .
- إختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع لتوزيع جاما .

تعرضنا في الوحدة الدراسية السابقة لكيفية توفيق توزيع نظرى لتوزيع فعلى معلوم بالنسبة للبيانات المتعلقة بعدد الحوادث، ونوضح فيما يلى كيفية توفيق توزيع نظرى لتوزيع فعلى معلوم بالنسبة للبيانات المتعلقة بقيمة الخسارة .

مثال: فيما يلى بيان عن توزيع الخسائر بفرع السطوح حسب قيمتها خلال عام ١٩٩٠ فى إحدى شركات التأمين المصرية :

فئة الخسائر	عدد الخسائر
صفر -	٥٠٤
٢٠٠٠ -	٣٥٢
٤٠٠٠ -	١٨٦
٦٠٠٠ -	٩١
٨٠٠٠ -	٤٤
١٠٠٠٠ -	٢٠
١٢٠٠٠ -	١٠
١٤٠٠٠ -	٤
١٦٠٠٠ -	٣
١٨٠٠٠ -	١
٢٠٠٠٠ - ٢٢٠٠٠	١

المطلوب:

- أ - إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع للتوزيع الطبيعى
 ب- إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع للتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى .

ج- إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات الأسى السالب

د- إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع لتوزيع جاما

الحل:

أ- إختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع للتوزيع الطبيعي:

حيث أن دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي دالة في معلمتين هما المتوسط μ ،

التباين σ^2 فإنه لابد من تقديرهما من بيانات العينة وذلك على النحو التالي :

جدول رقم (١) يوضح خطوات حساب المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع قيمة

الخصائر :

الفئة	التكرار	مركز الفئة س	س ك	س ^٢ ك
صفر -	٥٠٤	١٠٠٠	٥٠٤٠٠٠	٦١٠×٥٠٤
٢٠٠٠ -	٣٥٢	٣٠٠٠	١٠٥٦٠٠٠	٦١٠×٣١٦٨
٤٠٠٠ -	١٨٦	٥٠٠٠	٩٣٠٠٠٠	٦١٠×٤٦٥٠
٦٠٠٠ -	٩١	٧٠٠٠	٦٣٧٠٠٠	٦١٠×٤٤٥٩
٨٠٠٠ -	٤٤	٩٠٠٠	٣٩٦٠٠٠	٦١٠×٣٥٦٤
١٠٠٠٠ -	٢٠	١١٠٠٠	٢٢٠٠٠٠	٦١٠×٢٤٢٠
١٢٠٠٠ -	١٠	١٣٠٠٠	١٣٠٠٠٠	٦١٠×١٦٩٠
١٤٠٠٠ -	٤	١٥٠٠٠	٦٠٠٠٠	٦١٠×٩٠٠
١٦٠٠٠ -	٣	١٧٠٠٠	٥١٠٠٠	٦١٠×٨٦٧
١٨٠٠٠ -	١	١٩٠٠٠	١٩٠٠٠	٦١٠×٣٦١
٢٠٠٠٠ - ٢٢٠٠٠	١	٢١٠٠٠	٢١٠٠٠	٦١٠×٤٤١
المجموع	١٢١٦		٤٠٢٤٠٠٠	٦١٠×٢٣٠٢٤

$$\bar{s} = \frac{\text{مجم س ك}}{\text{مجم ك}} = \frac{4024000}{1216} = 3309.211$$

$$ع = \frac{\text{مجم س ك}^2 - \frac{(\text{مجم س ك})^2}{\text{مجم ك}}}{\text{مجم ك} - 1}$$

$$= \frac{23024 \times 10^6 - \frac{(4024000)^2}{1216}}{1215} = 79199.7$$

$$ع = 28267642$$

وحيث أن المتغير العشوائى $y = \frac{\mu - s}{\sigma}$ يتوزع توزيعاً طبيعياً معيارياً
و بمساواة المتوسط والانحراف المعياري النظريين بالمتوسط والانحراف المعياري الفعليين ينتج

$$أن ي = \frac{s - \bar{s}}{ع} \text{ تتوزع توزيعاً طبيعياً معيارياً}$$

—

وبالتعويض عن س بالحد الأعلى للفئات ، $s = 3309.211$ ، $ع = 28267642$ نحصل على:

جدول رقم ٢ الاحتمال التجميعي والتكرار النظري للتوزيع الطبيعي

الحد الاعلى للفئات	ى	الاحتمال التجميعي	التكرار التجميعي	التكرار
٢٠٠٠	-٠.٤٦	٠.٣٢٢٧٦	٣٩٣	٣٩٣
٤٠٠٠	٠.٢٤	٠.٥٩٤٨٣	٧٢٣	٣٣٠
٦٠٠٠	٠.٩٥	٠.٨٢٨٩٤	١٠٠٨	٢٨٥
٨٠٠٠	١.٦٦	٠.٩٥١٥٤	١١٥٧	١٤٩
١٠٠٠٠	٢.٣٧	٠.٩٩١١١	١٢٠٥	٤٨
١٢٠٠٠	٣.٠٧	٠.٩٩٨٩٣	١٢١٥	١٠
١٤٠٠٠	٣.٧٨	٠.٩٩٩٩٢	١٢١٦	١
١٦٠٠٠	٤.٤٩	٠.٩٩٩٩٧	١٢١٦	صفر
١٨٠٠٠	٥.٢	٠.٩٩٩٩٧	١٢١٦	صفر
٢٠٠٠٠	٥.٩	٠.٩٩٩٩٧	١٢١٦	صفر
٢٢٠٠٠	٦.٦١	٠.٩٩٩٩٧	١٢١٦	صفر
المجموع				١٢١٦

اختبار سميرنوف كملوجروف : يتم مقارنة الفرق بين الاحتمالات التجميعية الفعلية والنظرية وتحديد اكبر فرق ومقارنته بقيمة سميرنوف الجدولية كما يلى :

جدول رقم ٣ اختيار سمير نوف للتوزيع الطبيعي

الفرق	الاحتمال التجسبي النظري	الاحتمال التجسبي الفعلي	التكرار التجسبي الفعلي	التكرار الفعلي	الفرقة
٠.٠٩١٧١	٠.٣٢٢٧٦	٠.٤١٤٤٧	٥٠٤	٥٠٤	صفر -
٠.١٠٩١٢	٠.٥٩٤٨٣	٠.٧٠٢٩٥	٨٥٦	٢٥٢	- ٢٠٠٠
٠.٢٧٩٧	٠.٨٢٨٩٤	٠.٨٥٦٩١	١٠٤٢	١٨٦	- ٤٠٠
٠.٠١٩٨	٠.٩٥١٥٤	٠.٩٣١٧٤	١١٢٣	٩١	- ٦٠٠٠
٠.٢٣١٨	٠.٩٩١١١	٠.٩٦٧٩٣	١١٧٧	٤٤	- ٨٠٠٠
٠.٠١٤٥٥	٠.٩٩٨٩٣	٠.٩٨٤٣٨	١١٩٧	٢٠	- ١٠٠٠٠
٠.٠٠٧٣٢	٠.٩٩٩٩٢	٠.٩٩٢٦٠	١٢٠٧	١٠	- ١٢٠٠٠
٠.٠٠٤٠٨	٠.٩٩٩٩٧	٠.٩٩٥٨٩	١٢١١	٤	- ١٤٠٠٠
٠.٠٠١٦١	٠.٩٩٩٩٧	٠.٩٩٨٣٦	١٢١٤	٣	- ١٦٠٠٠
٠.٠٠٠٧٩	٠.٩٩٩٩٧	٠.٩٩٩١٨	١٢١٥	١	- ١٨٠٠٠
٠.٠٠٠٠٣	٠.٩٩٩٩٧	١	١٢١٦	١	٢٢٠٠٠ - ٢٠٠٠٠

و من البيانات السابقة يتضح أن اكبر قيمة للفرق هي ٠.٩١٢٠١٢ وبمقارنة هذه

$$\frac{١٣٦}{١٢١٦} = ٠.٠٣٩ \quad (١٢١٦, ٥\%)$$

نجد أن القيمة المحسوبة اكبر من الجدولية وبالتالي فإننا نرفض فرض العدم ونقبل

الفرض البديل أي أن البيانات لا تخضع للتوزيع الطبيعي

ب- اختبار صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تخضع للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي:

$$z = \frac{\mu - \text{لوس}}{\sigma} \quad \text{يتوزع توزيعاً طبيعياً (حيث س الحد الاعلى}$$

للبيانات) وبالتالي يمكن استخدام جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي في إيجاد

قيمتها وحيث أن المتغير z يعتمد على معلمتين هي μ ، σ فإنه يتم حسابهما أولاً

باستخدام معادلتى المتوسط والتباين الخاصتين بالتوزيع اللوغاريتمى الطبيعى كما يلى:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2$$

وبمساواة المتوسط والتباين النظريين بالمتوسط والتباين الفعليين ينتج أن :

$$(1) \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2 = 330.9211$$

$$(2) \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2 = 79899.07$$

وبقسمة المعادلة الثانية على مربع المعادلة الاولى ينتج أن :

$$\sigma^2 = 0.7296136$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين للاساس ه ينتج أن:

$$\sigma = 0.854789802$$

وبالتعويض بقيمة σ فى معادلة المتوسط ينتج أن :

$$\mu = 330.9211 + 273949.14 = 273949.14$$

ينتج أن:

$$\mu = 810.4464 + 273949.14 = 273949.14$$

$$\mu = 7820.515886$$

$$\frac{\mu - \text{لوس}}{\sigma} = \text{ى} \text{ الدالة فى الفئات فى الجدول التوزيع الطبيعى نحصل على البيانات التالية:}$$

ثم بالكشف فى جدول التوزيع الطبيعى نحصل على البيانات التالية:

جدول رقم (٤) التوزيع النظري لقيمة الخسارة باستخدام التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي

الفترة	لوغاريتم الحد الأعلى للفترة	ي	الاحتمال النظري التجميعي	التكرار النظري التجميعي	التكرار النظري
صفر -	٧٦٠.٩	٠.٣١-	٢٧٨٢٨ر	٤٦٠	٤٦٠
- ٢٠٠٠	٨٢٩٤٠	٠.٦٣	٧٢٥٦٥ر	٨٩٥	٤٢٥
- ٤٠٠٠	٨٦٩٩٥	١.١٧	٠.٨٧٩	١٠٦٩	١٧٤
- ٦٠٠٠	٨٩٨٧٢	١.٥٦	٠.٩٤٠٦٢	١١٤٤	٧٥
- ٨٠٠٠	٩٢١٠٢	١.٨٦	٠.٩٦٨٥٦	١١٧٨	٢٤
- ١٠٠٠٠	٩٣٩٣٧	٢.١١	٠.٩٨٢٥٧	١١٩٥	١٧
- ١٢٠٠٠	٩٥٤٦٨	٢.٣٢	٠.٩٨٩٨٣	١٢٠٤	٩
- ١٤٠٠٠	٩٦٨٠٣	٢.٥٠	٠.٩٩٣٧٩	١٢٠٨	٤
- ١٦٠٠٠	٩٧٩٨١	٢.٦٦	٠.٩٩٦٠٩	١٢١١	٣
- ١٨٠٠٠	٩٩٠٣٥	٢.٨٠	٠.٩٩٧٤٤	١٢١٣	٢
- ٢٠٠٠٠	٩٩٩٨٨	٢.٩٣	٠.٩٩٨٣١	١٢١٤	١
- ٢٢٠٠٠	١٠٠٨٥٨	٣.٠٥	٠.٩٩٨٨٦	١٢١٥	١
٢٤٠٠٠	١٠١٦٥٩	٣.١٦	٠.٩٩٩٢١	١٢١٥	صفر
٢٦٠٠٠	١٠٢٤٠٠	٣.٢٦	٠.٩٩٩٤٤	١٢١٥	صفر
٢٨٠٠٠ - ٣٠٠٠٠	١٠٣٠٩٠	٣.٣٥	٠.٩٩٩٦٠	١٢١٦	١

وفيما يلي يتم إختبار ما إذا كانت البيانات الفعلية لتوزيع قيمة الخسارة تخضع

للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي أم لا وذلك باستخدام إختبار كا^٢:

جدول رقم (٥) اختبار كا^٢ للتوزيع اللوغارتمى الطبيعى

الفئة	التكرار الفعلى	التكرار النظرى	كا ^٢ المحسوبة
صفر -	٥٠٤	٤٦٠	٤.٢٠٩
- ٢٠٠٠	٣٥٢	٤٣٥	١٥.٨٢٨
- ٤٠٠٠	١٨٦	١٧٤	٨.٢٨
- ٦٠٠٠	٩١	٧٥	٣.٤١٣
- ٨٠٠٠	٤٤	٣٤	٢.٩٤١
- ١٠٠٠٠	٢٠	١٧	٠.٥٢٩
- ١٢٠٠٠	١٠	٩	٠.١١١
- ١٤٠٠٠	٤	٤	٠.٧٥٠ *
- ١٦٠٠٠	٣	٣	
- ١٨٠٠٠	١	٢	
- ٢٠٠٠٠	١	-	
- ٢٢٠٠٠	صفر	١	
- ٢٤٠٠٠	صفر	صفر	
- ٢٦٠٠٠	صفر	صفر	
٢٨٠٠٠ - ٣٠٠٠٠	صفر	١	
المجموع	١٢١٦	١٢١٦	٢٨.٦١٨

* ملاحظة: تم دمج الفئات من ١٤٠٠٠ - ٣٠٠٠٠ لأن التكرار أمام أى فئة

منها أقل من ٥ مع خصم درجة حرية أخرى مقابل عملية الدمج

كا^٢ الجدولية (٦ ، ٥ ٪) = ١٢.٥٩

وحيث أن كا^٢ المحسوبة اكبر من الجدولية فإنه يوجد فرق معنوى وبالتالي فإن

البيانات لا تخضع للتوزيع اللوغارتمى الطبيعى.

ج- اختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع للتوزيع الأسى السالب:

تأخذ دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الأسى السالب الشكل التالى:

$$f(s) = y^s - y^h, \quad s \leq \text{صفر}$$

$$\text{والمتوسط} = \frac{1}{y}, \quad \text{والتباين} = \frac{1}{y^2}$$

كما تأخذ دالة التوزيع (دالة الاحتمال التجميعية) الشكل التالى :

$$d(s) = 1 - y^s - y^h$$

ومن بيانات التوزيع الفعلى وجدنا أن $s = 211$ و 230.9

وبمساواه المتوسط الفعلى بالمتوسط النظرى (لأن التوزيع ذى معلمة وحيدة) ينتج

أن،

$$\frac{1}{y} = 230.9, 211$$

$$y = 0.000302$$

وبالتعويض عن s بالحد الاعلى للفئات فى دالة التوزيع نحصل على التوزيع النظرى

التالى:

جدول رقم (٦) التوزيع النظري لقيمة الخسارة باستخدام التوزيع

الأسى السالب واختبار كا^٢

الفئة	ي س	الاحتمال النظري التجميعي	التكرار النظري التجميعي	التكرار النظري	التكرار الفعلي	كا ^٢
صفر -	٠.٦٠٤٣٨	٠.٤٥٣٥٨٧	٥٥٢	٥٥٢	٥٠٤	٤١٧٤
- ٢٠٠٠	١.٢٠٨٧٦	٠.٧٠١٤٣٣	٨٥٣	٢٠١	٢٥٢	٨٦٤١
- ٤٠٠٠	١.٨١٣١٤	٠.٨٣٦٨٥٩	١٠١٨	١٦٥	١٨٦	٢٦٧٣
- ٦٠٠٠	٢.٤١٧٥٢	٠.٩١٠٨٥٨	١١٠٨	٩٠	٩١	٠.١١
- ٨٠٠٠	٣.٠٢١٩	٠.٩٥١٢٩١	١١٥٧	٤٩	٤٤	٠.٥١
- ١٠٠٠٠	٣.٦٢٨٢٨	٠.٩٧٣٤٣٨	١١٨٤	٢٧	٢٠	١.٨١٥
- ١٢٠٠٠	٤.٢٣٠٦٦	٠.٩٨٥٤٥٧	١١٩٨	١٤	١٠	١.١٤٣
- ١٤٠٠٠	٤.٨٣٥٠٤	٠.٩٩٢٠٥٤	١٢٠٦	٨	٤	٣.٥٥٦ x
- ١٦٠٠٠	٥.٤٣٩٤٢	٠.٩٩٥٦٥٨	١٢١١	٥	٣	
- ١٨٠٠٠	٦.٠٤٣	٠.٩٩٧٦٢٦	١٢١٣	٢	١	
- ٢٠٠٠٠	٦.٦٤٨١٨	٠.٩٩٨٧٠٤	١٢١٤	١	١	
- ٢٢٠٠٠	٧.٢٥٢٥٦	٠.٩٩٩٢٩٢	١٢١٥	١	صفر	
٢٦٠٠٠ - ٢٤٠٠٠	٧.٨٥٦٩٤	٠.٩٩٩٦١١	١٢١٦	١	صفر	
المجموع				١٢١٦	١٢١٦	٢٢.٥٢٣

* ملاحظة: تم دمج الفئات من ١٤٠٠٠ - ٢٦٠٠٠ لأن التكرار أمام أى فئة منها أقل من ٥

٠. كا^٢ الجدولية (٦ ، ٥٠٪) = ١٢.٥٩

وحيث أن كا^٢ المحسوبة اكبر من الجدولية فإنه يوجد فرق معنوى وبالتالي فإن البيانات لا تخضع للتوزيع الأسى السالب .

٤- إختبار صحة الفرض القائل بأن البيانات تخضع لتوزيع جاما .

تأخذ دالة التوزيع لتوزيع جاما الشكل التالى :

$$D(s) = \left[\frac{B}{\Gamma} \right]^{s-1} e^{-\frac{B}{\Gamma}} \quad (s \geq 1)$$

$$\frac{\Gamma}{B} = \text{المتوسط} \quad \text{والتباين} = \frac{\Gamma}{B^2}$$

وبمساواة المتوسط والتباين النظريين بالمتوسط والتباين الفعليين :

$$(1) \quad \frac{\Gamma}{B} = 33.9211$$

$$(2) \quad \frac{\Gamma}{B^2} = 79899.7 \quad \text{وبقسمة معادلة (1) على معادلة (2) ينتج أن:}$$

$$\frac{B}{\Gamma} \times \frac{\Gamma}{B} = \frac{33.9211}{79899.7}$$

$$B = 0.000414 \quad \text{وبالتعويض بقيمة } B \text{ فى معادلة (1)}$$

$$\frac{\Gamma}{0.000414} = 33.9211$$

$$\Gamma = 137.0588$$

$$D(s) = \left[\frac{0.000414}{137.0588} \right]^{s-1} e^{-\frac{0.000414}{137.0588}} \quad (s \geq 1)$$

وبالتعويض عن س بالحد الاعلى للفئات فى هذه الدالة وبايجاد تكامل هذه الدالة

بالطريقة التقريبية السابق إستخدامها عند دراسة توزيع جاما فى الوحدة العاشرة

نحصل على النتائج التالية :

جدول رقم (٧) التوزيع النظري لقيمة الخسارة باستخدام توزيع جاما

واختبار كا^٢

الفترة	ع (س)	ص (ع (س)) (الاحتمال النظري)	التكرار النظري التجميعي	التكرار النظري	التكرار الفعلي	كا
صفر -	٠.٢٥٧٩٨٤	٠.٣٩٨٢٣	٤٨٤	٤٨٤	٥.٤	٠.٨٢٦
- ٢.٠٠	٠.٥١٢٨٢٨	٠.٦٩٦٥٤٨	٨٤٧	٣٦٣	٢٥٢	٠.٣٣٣
- ٤.٠٠	١.٠٥٥٢٥٦	٠.٨٥٤١١٢	١.٣٩	١٩٢	١٨٦	٠.١٨٨
- ٦.٠٠	١.٤٨٦٢٧٧	٠.٩٣١٤٦٢	١١٣٣	٩٤	٩١	٠.٠٩٦
- ٨.٠٠	١.٨٥٠٢٥٧	٠.٩٦٨٩٣	١١٧٧	٤٤	٤٤	صفر
- ١٠.٠٠	٢.١٦٨٤١٨	٠.٩٨٥٠٢٣	١١٩٨	٢١	٢٠	٠.٠٤٨
- ١٢.٠٠	٢.٤٥٢٩٢٤	٠.٩٩٢٨١٢	١٢.٧	٩	١.٠	٠.١١١
- ١٤.٠٠	٢.٧١١٤٧٠	٠.٩٩٦٤٤٢	١٢١٢	٥	٤	
- ١٦.٠٠	٢.٩٤٩٢٧٦	٠.٩٩٨١٧٤	١٢١٤	٢	٣	صفر x
- ١٨.٠٠	٣.١٧٠.٥٧	٠.٩٩٩٠٣١	١٢١٥	١	١	
- ٢٠.٠٠	٣.٣٧٦٥٦٩	٠.٩٩٩٤٦٥	١٢١٥	صفر	١	
٢٤.٠٠ - ٢٢.٠٠	٣.٥٧٠.٩١٥	٠.٩٩٩٦٩٥	١٢١٦	١	صفر	
المجموع				١٢١٦		١٦.٢

*ملاحظة: تم دمج الفئات من ١٤.٠٠ - ٢٤.٠٠ لأن التكرار أمام أى

فئة أقل من ٥ .

٠.٠ كا٢ الجدولية (٦, ٥ %) = ١٢.٥٩

وحيث أن كا٢ المحسوبة أصغر من الجدولية

٠.٠ لا يوجد فرق معنوى وبالتالي فإننا نقبل الفرض القائل بأن هذه البيانات تتبع

توزيع جاما .

أسئلة على الوحدة الثانية عشرة

(١) فيما يلي توزيع عينة من ١٠٠٠ وثيقة تأمين سيارات حسب قيمة الخسارة:

فئة الخسارة	صفر -	٤٠٠٠ -	٨٠٠٠ -	١٢٠٠٠ -	١٦٠٠٠ -	٢٠٠٠ -	٢٤٠٠٠ -	٢٨٠٠٠ -	٣٢٠٠٠ - ٣٦٠٠٠
عدد الوثائق	٢٠	٢٤٠	٣٢٠	٢١٠	١٠٠	٦٠	٣٠	١٠	١٠

إختبر صحة الفرض القائل بأن هذه البيانات تتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي

(٢) فيما يلي توزيع عينة من ١١٦٠ وثيقة سيارات حسب قيمة الخسارة:

فئة الخسارة	صفر	٤٠٠٠	٨٠٠٠	١٢٠٠٠	١٦٠٠٠	٢٠٠٠٠	٢٤٠٠٠	٢٨٠٠٠	٣٢٠٠٠ - ٣٦٠٠٠
عدد الوثائق	٥١١	٣٤١	١٧٠	٨٠	٣٥	١٤	٦	٢	١

إختبر صحة الفرض القائل بأن :

أ- هذه البيانات تتبع التوزيع الأسى السالب .

ب- هذه البيانات تتبع توزيع جاما .

ج- هذه البيانات تتبع توزيع باريتو .

**الوحدة الدراسية
الثالثة عشرة
قياس الخطر**

الوحدة الدراسية الثالثة عشرة

موضوعها : قياس الخطر

هدفها : كيفية قياس الخطر من خلال تحديد الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي.

عناصرها :-

- علاقة الخطر بعدد النتائج .
- الأداة الاحصائية المستخدمة في قياس الخطر .
- أهمية تحديد الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي .

علاقة الخطر بعدد النتائج:

يعرف الخطر بأنه "الخوف من تجاوز الخسائر المادية الفعلية عن الخسائر المتوقعة نتيجة حادث مفاجيء" ويقصد بتجاوز الخسائر المادية الفعلية عن الخسائر المتوقعة التباين أو الانحراف الموجب للخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة ، وبمعنى آخر فإن الخطر يتمثل في الخوف من أن تزيد الخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة ، وبناء على ذلك اذا كان هناك خطر يترتب عليه نتيجة واحدة فإن الانحراف في النتائج يساوى صفر وبالتالي لا يوجد خطر ، اما إذا كان هناك خطر يترتب عليه عدة نتائج ولكل نتيجة احتمال معين فإننا لا نستطيع أن نحدد أى من هذه النتائج سوف تتحقق ، وقد يقدر مدير الخطر قيمة معينة للخسائر وتحدث خسارة بقيمة اكبر منها وهذا يعنى انه كلما زاد عدد النتائج الممكنة مع صعوبة تحديد أى من هذه النتائج سوف تتحقق كلما زادت قيمة الخطر ، وفى حالة ثلاثة اذا كان هناك خطر يترتب عليه نتائج محدودة ويمكن التنبؤ بها بدرجة ثقة عالية فإن هذا يترتب عليه إنخفاض قيمة الخطر .

كما يضاف الى ما سبق انه قد يتوافر لدينا عدة توزيعات احتمالية للخسارة تتساوى فيها القيمة المتوقعة (المتوسط) ومع هذا فإنها تختلف فى قيمة الخطر ، ولتوضيح ذلك تأخذ فى الاعتبار المثال التالى :

مثال (١)

عرض عليك ٣ انواع من السيارات قيمة كل منها ٥٠٠٠ جنية وفيما يلى التوزيع الاحتمالى للخسائر السنوية لكل سيارة :

جدول (١) التوزيع الاحتمالى الأول

الاحتمال	قيمة الخسارة
١٥٠٠	١٥٠٠
١٥٠٠	المجموع

جدول (٢) التوزيع الاحتمالي الثاني جدول (٣) التوزيع الاحتمالي الثالث

قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٣٠ر
١٠٠٠	٢٥ر
٢٠٠٠	٢٠ر
٣٠٠٠	١٥ر
٤٠٠٠	١٠ر
المجموع	١٠٠ر

قيمة الخسارة	الاحتمال
٥٠٠	٢٥ر
١٥٠٠	٩٥ر
٢٥٠٠	٢٥ر
المجموع	١٠٠ر

حدد أى السيارات أفضل

الحل :

بحساب متوسط الخسارة المتوقعة للتوزيعات الاحتمالية الثلاثة نجد أن :

متوسط الخسارة المتوقعة فى التوزيع الأول = $1 \times 1500 = 1500$ جنيهمتوسط الخسارة المتوقعة فى التوزيع الثانى = $0.25 \times 500 + 0.95 \times 1500 + 0.25 \times 2500$ $= 12.5 + 1425 + 62.5 = 1500$ جنيهمتوسط الخسارة المتوقعة فى التوزيع الثالث = صفر $\times 30 + 1000 \times 25 + 2000$ $+ 3000 \times 15 + 4000 \times 10$ $= 0 + 250 + 400 + 450 + 400 = 1500$ جنيه

وهذا يعنى ان التوزيعات الثلاثة متوسط الخسارة المتوقعة فيها متساو تماما ،

ومع هذا فإنه بالنظر إلى قيم الخسائر وإحتمالاتها فى التوزيعات الثلاثة نجد أن :

بالنسبة للتوزيع الأول فإن احتمال حدوث خسارة قيمتها صفر (وهو يمثل احتمال عدم حدوث خسارة) قيمته صفر وبالتالي فإن احتمال حدوث الحادث يساوى واحد صحيح وقيمة الخسارة ١٥٠٠ جنيه وهذا يعنى أن قيمة الخسارة ثابتة من سنة لأخرى وليس هناك انحراف فيها وبالتالي فإنه لا يوجد خطر (قيمة الخطر تساوى صفر) حيث تصبح قيمة الخسارة السنوية فى حكم مصروفات التشغيل .

وبالنسبة للتوزيع الثانى فإنه توجد ٣ حالات أو نتائج وتوجد نتيجة واحدة احتمالها ٩٥٪ وهى التى يترتب عليها خسارة قيمتها ١٥٠٠ أما النتيجة الأولى والثالثة فإن احتمال كل منهما ٢,٥٪ وهذا يعنى أنه يمكن التنبؤ بأى من النتائج سوف تتحقق وبمعنى أدق فإنه يمكن بدرجة ثقة كبيرة تقدير مدى محدود (حد أدنى وحد أقصى) يمكن أن تقع فيه الخسارة أو الخسائر التى ستحدث فى العام القادم (وذلك لأن هناك نتيجة احتمالها كبير جدا بالإضافة إلى أن الخسائر تأخذ مدى محدود يتراوح بين ٥٠٠ ، ٢٥٠٠) جنيه وهذا يعنى أن الانحراف فى النتائج الممكنة (الخطر) موجود ولكنه محدود. وبالنسبة للتوزيع الثالث فإنه توجد ٥ حالات أو نتائج ممكنة وإحتمال حدوث أى نتيجة من هذه النتائج يساوى ١٠٪ على الأقل وبالتالي يصعب تغليب حدوث حالة معينة ، يضاف إلى ذلك أن النتائج المختلفة تأخذ مدى أكبر من حالة التوزيع الاحتمال الثانى وهذا المدى يتراوح بين صفر ، ٤٠٠٠ جنيه وفى هذه الحالة يصعب التنبؤ بأى من النتائج سوف تتحقق وهذا يعنى أن الانحراف فى النتائج الممكنة (الخطر) موجود ولكن بدرجة أكبر من الخطر الموجود فى التوزيع الثانى .

الأداة الإحصائية المستخدمة فى قياس الخطر:

نخلص مما سبق أن العلاقة بين الخطر والتوزيع الاحتمالى للخسائر تتمثل فى أن الخطر يعتبر تميزا للتوزيع الاحتمالى ، ولكن عند إدارة الخطر فإننا نحتاج إلى أداة إحصائية yardstick تستخدم فى قياس المدى الذى يمكن أن تنحرف فيه الخسائر الفعلية عن الخسائر المتوقعة فى الأجل الطويل ، وبمعنى آخر فإننا نحتاج إلى أداة لقياس

الخطر وهناك العديد من الأدوات الاحصائية التى تقيس إنتشار القيم حول المتوسط ومن أهم هذه المقاييس وأكثرها إستخداما الانحراف المعياري Standard deviation وهو عبارة عن " الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات إنحرافات القيم عن متوسطها الحسابي " وفى حالة التوزيعات الاحتمالية فإن الانحراف المعياري يكون عبارة عن " الجذر التربيعي الموجب لمجموع حاصل ضرب مربعات إنحرافات القيم عن متوسطها الحسابي فى إحتماالاتها " ، وفيما يلى نوضح خطوات حساب الانحراف المعياري من التوزيعات الاحتمالية :

١- حساب متوسط قيم الخسائر (وهو عبارة عن مجموع حاصل ضرب مراكز فئات الخسارة فى إحتماالاتها)

٢- طرح متوسط الخسائر من جميع مراكز فئات الخسائر (يسمى الناتج بأنحراف القيم عن وسطها)

٣- تربيع إنحرافات القيم عن وسطها .

٤- ضرب مربع إنحرافات القيم عن وسطها فى الاحتمال المناظر وإيجاد المجموع (الناتج يسمى التباين Variance) .

٥- إيجاد الجذر التربيعي للتباين فنحصل على الانحراف المعياري .

$$\therefore \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\text{مجموع} [(س - \bar{س})^2 \times ح(س)]}$$

حيث : σ الانحراف المعياري (جذر التباين σ^2) ، $\bar{س}$ قيم الخسائر (مراكز الفئات) ، $س$ متوسط قيم الخسائر ، $ح(س)$ إحتمال حدوث كل خسارة .

وفيما يلى يتم حساب الانحراف المعياري للتوزيعات الإحتمالية الثلاثة السابقة :

التوزيع الاحتمالي الأول:

جدول رقم (٤) حساب الانحراف المعياري

قيمة الخسارة	الاحتمال ح (س)	الخسارة × الاحتمال س × ح (س)	الخسارة - المتوسط س - $\bar{س}$	(الخسارة - المتوسط) ^٢ (س - $\bar{س}$) ^٢	(الخسارة - المتوسط) ^٢ × الاحتمال (س - $\bar{س}$) ^٢ × ح (س)
١٥٠٠	١,٠٠	١٥٠٠	١٥٠٠ - ١٥٠٠ = صفر	صفر	صفر × ١ = صفر
المجموع	١,٠٠	$\bar{س} = ١٥٠٠$			التباين $\sigma^2 =$ صفر ∴ الانحراف $\sigma =$ صفر

التوزيع الاحتمال الثاني

جدول رقم (٥) حساب الانحراف المعياري

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	الخسارة × الاحتمال س × ح (س)	الخسارة - المتوسط س - $\bar{س}$	(الخسارة - المتوسط) ^٢ (س - $\bar{س}$) ^٢	(الخسارة - المتوسط) ^٢ × الاحتمال (س - $\bar{س}$) ^٢ × ح (س)
٥٠٠	٠,٢٥	١٢,٥	١٠٠٠ - ١٠٠٠ = صفر	١٠٠٠٠٠	٢٥٠٠٠
١٥٠٠	٠,٩٥	١٤٢,٥	١٠٠٠ - ١٠٠٠ = صفر	١٠٠٠٠٠	٢٥٠٠٠
٢٥٠٠	٠,٢٥	٦٢,٥	١٠٠٠ - ١٠٠٠ = صفر	١٠٠٠٠٠	٢٥٠٠٠
المجموع	١,٠٠	$\bar{س} = ١٥٠٠$			التباين $\sigma^2 =$ ٥٠٠٠٠ الانحراف $\sigma =$ ٢٢٣,٦٠٧

التوزيع الاحتمالي الثالث

جدول رقم (٦) حساب الانحراف المعياري

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	الخسارة \times الاحتمال س \times ح (س)	الخسارة - المتوسط س - $\bar{س}$	(الخسارة - المتوسط) ^٢ (س - $\bar{س}$) ^٢	(الخسارة - المتوسط) ^٢ \times الاحتمال (س - $\bar{س}$) ^٢ \times ح (س)
صفر	,٣٠	صفر	١٥٠٠ -	٢٢٥٠٠٠٠	٦٧٥٠٠٠
١٠٠٠	,٢٥	٢٥٠	٥٠٠ -	٢٥٠٠٠٠	٦٢٥٠٠
٢٠٠٠	,٢٠	٤٠٠	٥٠٠	٢٥٠٠٠٠	٥٠٠٠٠
٣٠٠٠	,١٥	٤٥٠	١٥٠٠	٢٢٥٠٠٠٠	٣٣٧٥٠٠
٤٠٠٠	,١٠	٤٠٠	٢٥٠٠	٦٢٥٠٠٠٠	٦٢٥٠٠٠
				التباين $\bar{س} = ٢$	
المجموع	١,٠٠	$\bar{س} = ١٥٠٠$			١٧٥٠٠٠٠ = الانحراف ١٣٢٢٢,٨٧٦

وبمقارنة النتائج التي حصلنا عليها من التوزيعات الاحتمالية الثلاثة نجد أن :

التوزيع الاحتمالي	المتوسط	الانحراف المعياري
الأول	١٥٠٠	صفر
الثاني	١٥٠٠	٢٢٣,٦٠٧
الثالث	١٥٠٠	١٣٢٢٢,٨٧٦

وهذه النتائج تؤكد تحليلنا السابق وقبل حساب الانحراف المعياري حيث توصلنا إلى أن الخطر معدوم في التوزيع الاحتمالي الأول (الانحراف المعياري = صفر) ، وأن الخطر

موجود فى التوزيع الاحتمالى الثانى ولكنه محدود (الانحراف المعيارى = ٢٢٣ر٦٠٧) ، وأن
الخطر موجود فى التوزيع الاحتمالى الثالث ولكن بدرجة أكبر (الانحراف المعيارى
= ٨٧٦ر١٣٢٢) .

نخلص مما سبق بنتيجة هامة ألا وهى انه عندما تكون هناك نتيجة واحدة مؤكدة فإن
هذا يعنى القدرة على التنبؤ بدقة تامة بالنتيجة المتوقعة وبالتالي لا يكون هناك خطرا
والانحراف المعيارى يساوى صفر ، وعندما يكون هناك عدد محدود من النتائج منها نتيجة
إحتمال تحققها كبير فإن هذا يعنى أن هناك خطر محدود ويكون الانحراف المعيارى صغيرا
وأخيرا فإنه عندما يكون هناك عدد كبير من النتائج مع صعوبة التنبؤ بأى من النتائج سوف
يتحقق فإن قيمة الخطر تزيد عن الحالة السابقة وبالتالي يكون الانحراف المعيارى كبيرا .

ولكن فى التحليل السابق استطعنا أن نقارن بين التوزيعات الثلاثة من خلال الانحراف
المعيارى لكل توزيع وذلك لأن متوسط قيمة الخسارة متساو فى التوزيعات الثلاثة (١٥٠٠
جنيه) وأيضا قيمة الشئ موضوع التأمين ، ولكن كيف نستطيع المقارنة بين توزيعين
يختلفان فى متوسط الخسارة أو فى قيمة الشئ أو فى القيمة المعرضة للخطر ؟ وأيضا كيف
نستطيع الحكم على الانحراف المعيارى (وبالتالي على الخطر) بأنه صغيرا أم كبيرا ؟

نجيب على ذلك فنقول إن السؤالين السابقين ناتجين من أن الانحراف المعيارى يعاب
عليه أنه ينتج فى صورة رقمية مطلقة وبالتالي يصعب الحكم عليه كما يصعب المقارنة بين
توزيعين أو أكثر من خلال الانحراف المعيارى كقيمة مطلقة ، ولذلك فإننا سوف نعتمد فى
قياس الخطر على مقياس آخر يسمى معامل الاختلاف Coefficient of variation
حيث :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{متوسط قيمة الخسارة}}$$

ويرى البعض أنه يجب قسمة الانحراف المعياري على أقصى قيمة معرضة للخطر أو على قيمة الشيء في حالة عدم توافر أقصى قيمة معرضة للخطر (وبالتالي فإن معامل الاختلاف في هذه الحالة يكون عبارة عن مقياس نسبي لوحدة الخطر الواحدة التي قيمتها جنيه واحد وذلك بتحديد لكل جنيه من أقصى قيمة معرضة للخطر أو من قيمة الشيء نصيبها من الانحراف المعياري) وفي هذه الحالة فإن معامل الاختلاف يتم تحديده كما يلي :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر أو قيمة الشيء}}$$

و بتطبيق ذلك على بيانات التوزيعات الاحتمالية الثلاثة السابقة لحساب معامل الاختلاف نحصل على ما يلي :

جدول رقم (٧) حساب معامل الاختلاف للتوزيعات الاحتمالية الثلاثة

التوزيع الاحتمالي البيان	الأول	الثاني	الثالث
المتوسط	١٥٠٠	١٥٠٠	١٥٠٠
أقصى قيمة معرضة للخطر	١٥٠٠	٢٥٠٠	٤٠٠٠
قيمة الشيء	٥٠٠٠	٥٠٠٠	٥٠٠٠
الانحراف المعياري	صفر	٢٢٣,٦٠٧	١٣٢٢,٨٧٦
معامل الاختلاف باستخدام	المتوسط	صفر	,٨٨٢
	أقصى قيمة معرضة للخطر	صفر	,٣٣١
	قيمة الشيء	صفر	,٢٦٥

ونلاحظ من خلال قيم معامل الاختلاف أن قيمة الخطر في التوزيع الاحتمالي الثالث أكبر من قيمة الخطر في التوزيع الثاني وهي بدورها أكبر من قيمة الخطر في التوزيع الأول وذلك سواء تم حساب معامل الأختلاف من خلال قسمة الانحراف المعياري على المتوسط أو أقصى قيمة معرضة للخطر أو قيمة الشيء .

ملاحظات :

١ - يمكن الاستفادة من خصائص المتوسط الحسابي والانحراف المعياري في تبسيط العمليات الحسابية الخاصة بحسابهما حيث نجد أن قسمة قيم الخسائر (س) على قيمة معينة (تسمى العامل المشترك أو ثابت الاختزال) تؤدي إلى أن :

متوسط البيانات الأصلية = متوسط البيانات بعد القسمة على العامل المشترك ×

العامل المشترك

والانحراف المعياري للبيانات الأصلية =

الانحراف المعياري للبيانات بعد القسمة على العامل المشترك × العامل المشترك

وبتطبيق هذه الخاصية على بيانات التوزيع الاحتمالي الثالث نحصل على البيانات

التالية :-

جدول رقم (٨) حساب الانحراف المعياري

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	س — = س̄ ١٠٠٠	الخسارة الجديدة الاحتمال ح س × ح (س)	الخسارة - المتوسط س - س̄	(الخسارة - المتوسط) ^٢ (س - س̄) ^٢	(س - س̄) ^٢ × ح (س)
صفر	٣٠ ر	صفر	صفر	١٥ ر -	٢٥ ر	٦٧٥ ر
١٠٠٠	٢٥ ر	١	٢٥ ر	٥ ر -	٢٥ ر	٠٦٥٢ ر
٢٠٠٠	٢٠ ر	٢	٤٠ ر	٥ ر	٢٥ ر	٠٥ ر
٣٠٠٠	١٥ ر	٣	٤٥ ر	٥ ر	٢٥ ر	٣٣٧٥ ر
٤٠٠٠	١٠ ر	٤	٤٠ ر	٥ ر	٢٥ ر	٦٢٥ ر
المجموع	١٠٠ ر		س̄ = ١٥ ر			التباين σ ^٢ = ١٧٥ ر الانحراف σ = ٪٣٢٢٢٨٧٦

من بيانات الجدول نجد أن متوسط البيانات المختزلة (بعد القسمة علي العامل المشترك) $\bar{s} = ١٠٥$

٠٠٠ متوسط البيانات الأصلية $\bar{s} =$ متوسط البيانات المختزلة \times العامل المشترك

$$\bar{s} = ١٥ ر = ١٠٠٠ \times ١٥٠٠ = ١٥٠٠ جنية$$

$$\sigma = ١٣٢٢٢٨٧٦ = \sigma$$

٠٠٠ الانحراف المعياري للبيانات الأصلية $\sigma =$ الانحراف المعياري للبيانات المختزلة \times العامل المشترك

$$١٣٢٢٢٨٧٦ = ١٠٠٠ \times ١٣٢٢٢٨٧٦ =$$

وهما نفس النتيجتين اللتين سبق الحصول عليهما بالطريقة المباشرة أى من البيانات الأصلية .

٢ - كما أن هناك صيغة أخرى مبسطة تستخدم لحساب الانحراف المعياري دون الحاجة إلى طرح المتوسط الحسابي \bar{s} - من قيم الخسارة s وهى :

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{\sum s^2 \times h(s) - (\sum s \times h(s))^2}{n}}$$

$$\text{أو} = \sqrt{\frac{\sum s^2 \times h(s) - (\sum s \times h(s))^2}{n} \times \text{العامل المشترك}}$$

حيث s هى القيم الأصلية للخسارة ، s^2 هى قيم الخسارة بعد قسمتها على العامل المشترك .

وبتطبيق هذه الصيغة على نفس بيانات المثال السابق نحصل على النتائج التالية:

جدول رقم (٩) حساب الانحراف المعياري

قيمة الخسارة s	الاحتمال $h(s)$	$\frac{s}{n} = \bar{s}$	$s^2 \times h(s)$	$s \times h(s)$
صفر	٣٠ر	صفر	صفر	صفر
١٠٠٠	٢٥ر	١	٢٥	٢٥ر
٢٠٠٠	٢٠ر	٢	٤٠	٨٠ر
٣٠٠٠	١٥ر	٣	٤٥	١٣٥ر
٤٠٠٠	١٠ر	٤	٤٠	١٦٠ر
المجموع	١٠٠ر			٤٠٠ر
				$\bar{s} = ١,٥$

٠٠٠ متوسط البيانات الأصلية $\bar{S} = \bar{S} \times \text{العامل المشترك}$.

$$\bar{S} = 1,5 \times 1000 = 1500 \text{ جنيه}$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \frac{\sqrt{\text{محد (س}^2 \times \text{ح س}^2) - \text{محد (س}^2 \times \text{ح س}^2)}}{\text{المشترك}} \times \text{العامل}$$

$$= \frac{\sqrt{1000 \times (1,5)^2}}{1000}$$

$$= \frac{1000 \times 1,75}{1000} = 1,75 \times 1000 = 1750,876$$

وهما نفس القيمتين اللتين سبق الحصول عليهما من البيانات الأصلية .

ويجيب استخدام معامل الاختلاف أو الانحراف المعياري في قياس الخطر أنهما بخلاف احتمال الخسارة (حيث يتراوح المدى الذي يمكن أن يقع خلاله بين صفر ، واحد صحيح) فالمدى الذي يمكن أن يقع خلاله يتراوح بين صفر ، مالانهاية وبالتالي ليس من السهل تفسيرهما وتبدو أهمية معامل الاختلاف في المقارنة بين توزيعين احتماليين يختلفان في القيمة المتوقعة للخسارة لأنه في هذه الحالة لا يمكن استخدام الانحراف المعياري كمقياس للخطر إلا تحت شرط تساوي القيمة المتوقعة للخسارة بين التوزيعين ، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي :

مثال (٢)

عرض عليك شراء أحد منزلين : الأول قيمته ١٢٠٠٠٠ جنيه والثاني قيمته ١٤٠٠٠٠ جنيه وكل منهما معرض لحادث حريق وتبلغ قيمة الأشياء غير القابلة للحريق ٢٠٪ وكان التوزيع الاحتمالي للخسائر كما يلي :

التوزيع الاحتمالي الأول

الخسارة	الاحتمال
صفر	٢٠ر
١٥٠٠٠	٣٠ر
٢٥٠٠٠	٢٥ر
٥٥٠٠٠	١٥ر
٧٥٠٠٠	٠٦ر
٩٥٠٠٠	٠٤ر

التوزيع الاحتمالي الثاني

الخسارة	الاحتمال
صفر	٢٠ر
٢٥٠٠٠	٣٥ر
٥٠٠٠٠	٣٠ر
٧٥٠٠٠	١٠ر
١٠٠٠٠٠	٠٥ر

فأى المنزلين تختار

الحل : بالطبع أنه سيتم إختيار المنزل الذي تكون قيمة الخطر فيه (أى معامل الاختلاف للتوزيع الاحتمالي لخسائره) أقل ويتم ذلك على النحو التالي :

جدول رقم (١٠) الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي الأول

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	$\frac{س}{١٠٠٠٠} = س'$	$س' \times ح (س)$	$(س) \times (س) \times ح (س)$ أو $س' \times ح (س) \times س'$
صفر	٢٠ر	صفر	صفر	صفر
١٥٠٠٠	٣٠ر	١,٥	٤٥٠ر	٦٧٥ر
٢٥٠٠٠	٢٥ر	٣,٥	٨٧٥ر	٣,٠٦٢٥
٥٥٠٠٠	١٥ر	٥,٥	٨٢٥ر	٤,٥٣٧٥
٧٥٠٠٠	٠٦ر	٧,٥	٤٥٠ر	٣,٣٧٥
٩٥٠٠٠	٠٤ر	٩,٥	٣٨٠ر	٣,٦١
المجموع	١,٠٠		٢,٩٨	١٥,٢٦

$$\bar{s} = 298 = 1000 \times 298 = 29800$$

$$\sigma = \sqrt{1000 \times (298^2 - 1526)} =$$

$$= \sqrt{1000 \times (88804 - 1526)} =$$

$$= \sqrt{1000 \times 87278} =$$

$$2525787 = 1000 \times 2525787 =$$

$$\therefore \text{أقصى قيمة معرضة للخطر} = 12000 \times 80 = 9600$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = \frac{2525787}{9600} = 263$$

جدول رقم (١١) الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي الثاني

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	$\bar{s} = \frac{س}{1000}$	$\bar{s} \times ح (س)$	$(س)^2 \times ح (س)$
صفر	٢٠	صفر	صفر	صفر
٢٥٠٠	٣٥	١	٣٥	٣٥
٥٠٠٠	٣٠	٢	٦٠	١٢٠
٧٥٠٠	١٠	٣	٣٠	٩٠
١٠٠٠٠	٥	٤	٢٠	٨٠
المجموع	١٠٠		١٤٥	٣٢٥

$$\therefore \bar{s} = 145 = 25000 \times 145 = 36250$$

$$= \sqrt{25000 \times (1.45)^2 - 3.25} =$$

$$= \sqrt{25000 \times (2.1025 - 3.25)} =$$

$$= \sqrt{25000 \times 1.1475} =$$

$$= 26780.357 = 25000 \times 1.071214 =$$

$$\therefore \text{أقصى قيمة معرضة للخطر} = 140000 \times 1.8 = 252000$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = \frac{26780.357}{112000} = 0.239$$

٠٠ العرض الثاني أفضل من العرض الأول لإنخفاض قيمة الخطر الخاصة به

أهمية تحديد الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي

١ - سبق أن أوضحنا أنه بمعلومية الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي (أو أقصى قيمة معرضة للخطر أو قيمة الشيء) فإنه يمكن تحديد قيمة الخطر للتوزيع وبالتالي يسهل المقارنة بين توزيعين احتماليين أو أكثر .

٢ - إذا كان التوزيع الإحتمالي للخسائر يتبع التوزيع الطبيعي فإنه يمكن باستخدام الانحراف المعياري والمتوسط تحديد احتمال أن قيمة الخسارة (أو مجموع الخسائر) تتراوح بين قيمتين محددتين .

٣ - إذا علم الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي للتوزيع الإحتمالي فإنه يمكن بدرجة ثقة معينة تحديد احتمال أن تنحرف قيمة الخسارة (أو مجموع الخسائر) عن المتوسط الحسابي بقيمة معينة أو أكثر منها ، فطبقا لمقايضة تشيبيشيف-Chebyshev ine quality يمكن القول بأن احتمال أن قيمة الخسارة (أو مجموع الخسائر) سوف تنحرف عن المتوسط الحسابي بمقدار ك أو أكثر من وحدات الانحراف المعياري

هو $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ على الأكثر . ولتوضيح ذلك إذا أخذنا في الاعتبار بيانات التوزيع الإحتمالى الثانى فى المثال السابق مباشرة حيث كان المتوسط ٣٦٢٥٠ ، والانحراف المعيارى ٣٥٧ ، ٢٦٧٨٠ فإنه يمكن القول بأن :

إحتمال أن قيمة الخسارة سوف تنحرف (بالزيادة أو النقص) عن المتوسط الحسابى بما قيمته ١,٥ انحراف المعيارى على الأقل يساوى $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ على الأكثر أى أن

$$ح(س + ١,٥ \sigma \geq \bar{س} \geq س - ١,٥ \sigma) \geq \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$ح(٣٦٢٥٠ + ١,٥ \times ٣٥٧ \geq س \geq ٣٦٢٥٠ - ١,٥ \times ٣٥٧) \geq \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$ح(٣٦٢٥٠ + ٥٣٦,٥١٧٠ \geq س \geq ٣٦٢٥٠ - ٥٣٦,٥١٧٠) \geq ٤٤٤,$$

$$ح(٧٦٤٢٠,٥٣٦ \geq س \geq ٣٩٢٠,٥٣٦) = ٤٤٤,$$

وهذا يعنى أن إحتمال أن قيمة الخسارة تساوى أو تزيد عن ٧٦٤٢٠,٥٣٦ أو تساوى أو تقل عن ٣٩٢٠,٥٣٦ (وهى مستبعدة) يساوى ٤٤٤ ,

٤ - بشرط ثبات العوامل الأخرى فإن زيادة عدد الوحدات المعرضة للخطر يؤدي إلى زيادة كلا من المتوسط الحسابى والانحراف المعيارى ومع الأخذ فى الاعتبار أن التباين هو مربع الانحراف المعيارى فإن زيادة عدد الوحدات المعرضة للخطر بمقدار ك من المرات من العدد القديم يزيد المتوسط الحسابى $\bar{س}$ لتصبح قيمته $ل \times \bar{س}$ وأيضا التباين σ^2 تصبح قيمة $ل \times \sigma^2$ وحيث أن الانحراف المعيارى هو جذر التباين فإن الانحراف المعيارى الجديد يصبح $\sigma \times \sqrt{ل}$ وهذا يعنى أن :

$$\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} = \text{قيمة الخطر القديم (معامل الاختلاف)}$$

$$\frac{\sigma}{\bar{س}} =$$

$$\text{وقيمة الخطر الجديد} = \frac{\sigma \times \sqrt{L}}{L \times \bar{S}} = \frac{\sim 2}{\sim 1} = \frac{\text{عدد الوحدات الجديدة}}{\text{عدد الوحدات القديمة}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}} \times \frac{\sigma}{\bar{S}} =$$

$$= \frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{L}} = \frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{\frac{\text{عدد الوحدات الجديدة}}{\text{عدد الوحدات القديمة}}}}$$

٠٠٠ . قيمة الخطر القديم تنخفض بمعامل قيمته تساوي الجذر التربيعي للنسبة بين عدد الوحدات الجديدة وعدد الوحدات القديمة ، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي :

مثال (٣)

شركة الهدى لنقل المحاصيل الزراعية لديها ٤ سيارات ومن خلال التوزيع الاحتمالى لمجموع قيم الخسائر السنوية تبين لنا أن المتوسط ٢٠٠٠ والانحراف المعياري ٣٥٠٠ ، فإذا علمت أن الشركة قررت شراء ٣٦ سيارة أخرى ، فما تأثير ذلك على قيمة الخطر .

الحل :

$$\text{٠٠٠ . قيمة الخطر القديم} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط}} = \frac{٣٥٠٠}{٢٠٠٠} = ١,٧٥$$

$$\text{٠٠٠ . معامل الزيادة في عدد السيارات} = \frac{\text{عدد السيارات الجديدة}}{\text{عدد السيارات القديمة}} = \frac{٣٦}{٤} = ٩$$

$$\text{٠٠٠ . متوسط مجموع الخسائر الجديد} = ٩ \times ٢٠٠٠ = ١٨٠٠٠$$

$$٠.٠ \text{ الانحراف المعياري الجديدة} = ٣٥٠٠ \times \sqrt{٩}$$

$$١٠٥٠٠ = ٣ \times ٣٥٠٠ =$$

$$٠.٠ \text{ قيمة الخطر الجديدة} = \frac{١٠٥٠٠}{١٨٠٠٠} = ٠,٥٨٣$$

ومن الممكن الوصول لهذه النتيجة مباشرة من خلال قسمة الخطر القديمة على جذر معامل الزيادة .

$$٠.٠ \text{ قيمة الخطر القديمة} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط}} = \frac{٣٥٠٠}{٢٠٠٠} = ١,٧٥$$

$$٠.٠ \text{ قيمة الخطر الجديدة} = \sqrt{\frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\text{معامل الزيادة}}}$$

$$= \sqrt{\frac{١,٧٥}{٣}}$$

$$= \sqrt{\frac{١,٧٥}{٩}}$$

$$= \frac{١,٧٥}{٣} = ٠,٥٨٣$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها .

وتفيد النتيجة السابقة في تحديد عدد الوحدات اللازمة لتخفيض قيمة الخطر حتى

يصل إلى قيمة معينة كما يتضح من المثال التالي :

مثال (٣)

شركة الهدى لنقل المحاصيل الزراعية لديها ٤ سيارات ، متوسط مجموع الخسائر السنوية لها ٢٠٠٠ جنيه ، الانحراف المعياري ، ٣٥٠٠ ، ما هو عدد السيارات اللازمة لتخفيض الخطر بمقدار ٨٠٪

الحل :

$$١.٧٥ = \frac{٣٥٠٠}{٢٠٠٠} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط}} = \text{قيمة الخطر القديمة}$$

وحيث أن تخفيض الخطر بمقدار ٨٠٪ يعنى أن تصبح قيمته ٢٠٪ أى

$$٣٥ = \frac{٢٠}{١٠٠} \times ١.٧٥ =$$

$$\sqrt{\frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\text{معامل الزيادة}}} = \text{قيمة الخطر الجديدة}$$

$$\sqrt{\frac{١.٧٥}{٤}} = ٣٥$$

$$\sqrt{\frac{١.٧٥}{\frac{٢ \sim}{٤}}} = ٣٥$$

$$\sqrt{\frac{٢ \sim}{٤}} \times ٣٥ = ١.٧٥ \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

$$٣,٠٦٢٥ = \frac{٢ \sim}{٤} \times ١٢٢,٣$$

$$٣,٠٦٢٥ = ٢ \sim \times ١٢٢,٣$$

$$١٠٠ = \frac{٣,٠٦٢٥}{١٢٢,٣} = ٢ \sim .$$

حيث $٢ \sim$ تمثل عدد الوحدات الجديدة الذي يؤدي إلى تخفيض الخطر من ١,٧٥ إلى ٣٥.

أسئلة على الوحدة الثالثة عشرة

- ١ - تتوقف قيمة الخطر على عدد النتائج المتوقعة بالإضافة إلى احتمالات تحقق كل نتيجة .
وضح رأيك في هذه العبارة مع ذكر أمثلة .
- ٢ - " لا توجد علاقة بين التوزيع الإحتمالي للخسائر والخطر " هل توافق على هذه العبارة . ولماذا .
- ٣ - يعتبر الانحراف المعياري من الأدوات الإحصائية الهامة المستخدمة في قياس الخطر إلا أن هناك إنتقادا هاما يوجه إليه ، أذكر هذا الإنتقاد .
- ٤ - أذكر مميزات إستخدام معامل الاختلاف كأداة إحصائية لقياس الخطر مع تحديد الطرق المختلفة لحسابه .
- ٥ - أذكر أهمية تحديد الانحراف المعياري للتوزيع الإحتمالي .
- ٦ - ما هو تأثير زيادة عدد الوحدات المعرضة للخطر على قيمة الخطر .
- ٧ - إذا علمت أن قيمة الخطر الخاص بوحدة واحدة يساوي ٧٥ ، ما هو تأثير زيادة عدد الوحدات إلى ٢٥ وحدة على قيمة الخطر .
- ٨ - مصنع قيمته ٨٠٠٠٠ جنيه ، الانحراف المعياري لمجموع الخسائر ٢٠٠٠٠ ، إحسب قيمة الخطر .
- ٩ - شركة كنتاكي لديها ٣٠ فرعا متماثلا قيمة كل فرع ٤٠٠٠٠ جنيه ، الإ انحراف المعياري لمجموع الخسائر السنوية للفروع كلها ٧٠٠٠ جنيه ، متوسط مجموع الخسائر السنوية ٢٥٠٠٠ ، ما هو تقديرك لقيمة الخطر ، وإذا أرادت الشركة إفتتاح ٩٠ فرعا آخر فما هو تأثير ذلك على كلا من متوسط مجموع الخسائر ، الانحراف المعياري لمجموع الخسائر ، قيمة الخطر .
- ١٠ - في المثال السابق إذا قررت الشركة إغلاق نصف عدد الفروع لإنخفاض قيمة المبيعات،

فما هو تأثير ذلك في ضوء البيانات السابقة على كلا من :

متوسط مجموع الخسائر ، الانحراف المعياري لمجموع الخسائر ، قيمة الخطر .

١١ - شركة الإيمان لنقل الركاب لديها ٤٠ سيارة قيمة كل منها ٦٠٠٠ جنيه ، متوسط مجموع الخسائر السنوية للسيارة ١٠٠٠ جنيه ، الانحراف المعياري لمجموع الخسائر السنوية للسيارة ٢٠٠٠ جنيه ما هو تقديرك لعدد السيارات المطلوب لتحقيق قيمة الخسارة بمقدار ٧٥٪ من قيمته .

١٢ - في المثال السابق إذا تدرت الشركة بيع ٢٠ سيارة فما هو تأثير ذلك على قيمة كل من : متوسط مجموع الخسائر ، الانحراف المعياري لمجموع الخسائر ، قيمة الخطر

١٣ - شخص يريد استثمار أمواله ، عرض عليه شراء أحد مصنعين للملابس الجاهزة الأول قيمته ١٠٠٠٠٠ جنيه والثاني ١١٠٠٠٠ جنيه فإذا علمت أن كلا المصنعين يعطى عائد استثمار قدره ١٤٪ سنوياً وأنه بدراسة حالات الخسارة التي تعرض لها كلا المصنعين منذ إنشائهما حصلنا على التوزيعين الاحتماليين التاليين لمجموع الخسائر.

التوزيع الاحتمالي الثاني لمجموع الخسائر

الإحتمال	مجموع الخسائر
٠,٤٠	صفر
٠,٢٠	٢٠٠٠٠
٠,٢٠	٤٠٠٠٠
٠,١٠	٦٠٠٠٠

التوزيع الاحتمالي الأول لمجموع الخسائر

الإحتمال	مجموع الخسائر
٠,٣٠	صفر
٠,٤٠	٢٠٠٠٠
٠,٢٥	٣٠٠٠٠
٠,٠٥	٤٠٠٠٠

بصفتك خبيراً في إدارة الخطر : أي المصنعين أفضل ولماذا ؟

الوحدة الدراسية الرابعة عشرة

تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع

الخصائر في حالة وجود وحدة خطر

واحدة ثم قياس الخطر

الوحدة الدراسية الرابعة عشرة

موضوعها: تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر السنوية في حالة وجود وحدة خطر واحدة ثم قياس الخطر .

هدفها: تعريف الطالب بكيفية إعداد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر السنوية في حالة عدم توافر التوزيع الاحتمالي لعدد وقيمة الخسارة ثم قياس الخطر.

عناصرها: تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة وجود وحدة خطر واحدة .

- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة تعرض وحدة الخطر لحادث على الأكثر والخسارة ثابتة .

- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة تعرض وحدة الخطر لحادث على الأكثر والخسارة متغيرة .

- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة تعرض وحدة الخطر لأكثر من حادث والخسارة ثابتة .

- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة تعرض وحدة الخطر لأكثر من حادث والخسارة متغيرة .

قياس الخطر فى حالة عدم توافر التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية:-

سبق أن أوضحنا أنه قد ينتج عن مسبب الخطر الواحد عدة خسائر متتابعة ، وفى بعض الحالات يواجة الشيء المعرض للخطر عدة مسببات للخطر الواحد ، وفى حالات أخرى قد يتعرض الشيء المعرض للخطر لأكثر من حادث خلال السنة ، وأخيراً قد يكون لدى الفرد أو المنشأة عدة وحدات معرضة للخطر وكل منها معرضة لحادث أو أكثر خلال السنة ، وفى جميع الحالات السابقة يكون من الأفضل تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر خلال السنة بدلاً من تحديد التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة الواحدة .

ولكن تواجهنا عدة مشاكل عند إعداد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية من أهمها أننا نحتاج إلى عدد كبير جداً من السنوات حتى يتم إعداد توزيع إحتمالى يمكن الاعتماد عليه وذلك لأن جميع الخسائر التى تحدث خلال أى سنة يتم تجميعها وتعتبر قيمة واحدة تعبر عن أحد قيم المتغير العشوائى (مجموع الخسائر) وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالى الذى قد نحصل عليه من خبرة ٢٠ أو ٣٠ سنة ماضية غالباً لن يعبر عما سيحدث فى المستقبل إما لتغير الاسعار وإما لتغير الظروف المحيطة بالخطر . وأيضاً قد نحتاج لإعداد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر إلى عدد كبير جداً من الوحدات المتماثلة (المنشآت) ثم تجميع خبرتها فى جدول واحد ، والمشكلة أيضاً تتمثل فى أنه يصعب توافر عدد كبير من الوحدات المتماثلة سواء فى تعرضها للخطر أو فى قيم الأشياء المعرضة للخطر فى كل منها .

وبالتالى لا يكون أمامنا وسيلة أخرى لإعداد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر سوى الاعتماد على التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة ، وسوف نوضح فيما يلى كيفية إعداد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر بمعلومية التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة وإستخدامه فى حساب الاحتمالات المختلفة بالإضافة إلى إستخدامه فى قياس الخطر .

أولاً تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة وجود وحدة خطر واحدة:-

في هذه الحالة فإن المنشأة يكون لديها وحدة خطر واحدة (سيارة ، مصنع ، سفينة) وهذه الوحدة تكون معرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة أو لأكثر من حادث خلال السنة ، وفي الحالتين فإنه يترتب على الحادث إما خسارة ثابتة في كل مرة أو تتغير قيمتها من حادث لآخر (خسارة متغيرة) ، ونوضح فيما يلي كيفية تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة وجود وحدة خطر واحدة بإستخدام التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة في الحالات الأربع السابقة :-

١- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة تعرض وحدة الخطر لحادث على الأكثر والخسارة ثابتة:-

في هذه الحالة نجد أن المنشأة تمتلك وحدة خطر واحدة وتكون معرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة وفي حالة تحققه فإنه يترتب عليه خسارة ثابتة دائماً ونوضح من خلال المثال التالي كيفية تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر .

مثال ١ :

يمتلك شخص لوحة فنية قيمتها ٢٠٠٠ جنية ومعرضة لخطر السرقة وفيما يلي التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة :

التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة

عدد الحوادث	الاحتمال	قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٨٠ر	٢٠٠٠	١ر
١	٢٠ر		
المجموع	١ر	المجموع	١ر

المطلوب : تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر ثم قياس الخطر

الحل:

يتضح من التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث أن أقصى عدد حوادث هو حادث واحد وهذا يعني أنه إما ألا يحدث الحادث (بإحتمال ٨٠٪) أو أن يحدث الحادث مرة واحدة (بإحتمال ٢٠٪)، كما يتضح من التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة أن قيمتها ٢٠٠٠ جنية بإحتمال قدرة واحد صحيح وهذا يعني أن الخسارة تتحقق بقيمة ثابتة تعادل قيمة الشيء (خسارة كلية)، ويتم الحصول على التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر كما يلي

– عدم حدوث الحادث وهذا لا يترتب عليه خسارة = إحتمال أن مجموع الخسائر يساوي صفر = ٨٠

– أن يحدث حادث واحد ويترتب عليه خسارة قيمتها ٢٠٠٠ جنية =

إحتمال حدوث حادث واحد \times إحتمال أن تكون قيمة الخسارة ٢٠٠٠ جنية

$$= ٢٠ \times ١٠٠ = ٢٠$$

ويكون التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر كما يلي:

التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر

مجموع الخسائر الاحتمال

صفر	٨٠
٢٠٠٠	٢٠
المجموع	١

ولقياس الخطر تتبع الخطوات السابقة لتحديد الانحراف المعياري أولاً ثم قسمته على

أقصى قيمة معرضة للخطر وذلك على النحو التالي :-

جدول رقم (١) حساب الانحراف المعياري

مجموع الخسائر	الاحتمال	$ح \times م$	$ح \times م^2$
صفر	٨٠	صفر	صفر
٢٠٠٠	٢٠	٤٠٠	٨٠٠٠٠
المجموع	١٠٠	٤٠٠	٨٠٠٠٠

$$\sigma = \sqrt{\text{مجموع } (ح \times م^2) - \frac{(\text{مجموع } (ح \times م))^2}{\text{مجموع } ح}}$$

$$= \sqrt{(٤٠٠) - \frac{٨٠٠٠٠}{١٠٠}}$$

$$= \sqrt{١٦٠٠٠٠ - ٨٠٠٠٠}$$

$$= \sqrt{٨٠٠٠٠} = ٢٨٠ = \sigma$$

$$\text{معامل الاختلاف (قيمة الخطر)} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}}$$

$$= \frac{٢٨٠}{٢٠٠٠} = ٠,١٤$$

٢- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة تعرض وحدة الخطر لحادث على الأكثر والخسارة متغيرة .

في هذه الحالة نجد أن المنشأة تمتلك وحدة خطر واحدة ومعرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة وفي حالة تحققه فإنه يترتب عليه خسارة متغيرة ، ونوضح من خلال المثال التالي كيفية تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر :

مثال ٢ :

مصنع قيمة محتويات ٥٠٠٠٠ جنيه ومعرض لحادث حريق على الأكثر خلال السنة ،
وفيما يلي التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث		التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة	
عدد الحوادث	الاحتمال	قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٨٠ر	٥٠٠٠	٦٠ر
١	٢٠ر	١٠٠٠٠	٢٥ر
المجموع	١٠٠	٢٠٠٠٠	١٠ر
		٣٠٠٠٠	٣٠ر
		٤٠٠٠٠	٢٠ر
		المجموع	١٠٠

المطلوب: تحديد التوزيع الاحتمالى للمجموع الخسائر ثم قياس الخطر :-

الحل :

يتضح من التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث أن أقصى عدد حوادث هو حادث واحد وهذا يعنى أنه إما ألا يحدث الحادث (بإحتمال قدره ٨٠ر) أو أن يحدث الحادث مرة واحدة (بإحتمال قدرة ٢٠ر) ، وفى حالة حدوث الخسارة فإنها تحدث بعدة قيم وبإحتمالات مختلفة وبالتالي فإنه يتم الحصول على التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر كما يلي :-

- عدم حدوث الحادث وإحتماله ٨٠ر وهذا يعنى أن مجموع الخسائر يساوى صفر

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى صفر = ٨٠ر

- أن يحدث حادث واحد إحتماله ٢٠ر وأن تحدث خسارة قيمتها ٥٠٠٠ جنية
إحتمالها ٦٠ر

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى $٥٠٠٠ = ٢٠ \times ,٦٠ = ١٢٠ر$

- أن يحدث حادث واحد إحتماله ٢٠ , وأن تحدث خسارة قيمتها ١٠٠٠٠ جنية
إحتمالها ٢٥ر.

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى $١٠٠٠٠ = ٢٠ \times ,٢٥ = ٥٠٠ر$

وهكذا بالنسبة لباقي قيم مجموع الخسائر حيث يتم ضرب إحتمال حدوث الحادث وهو
٢٠ , فى إحتمال الخسارة المناظرة لكل قيمة فنحصل على الاحتمالات الآتية :-

- إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى $٢٠٠٠٠ = ٢٠ \times ,١٠ = ٢٠٠ر$

- إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى $٣٠٠٠٠ = ٢٠ \times ,٠٣ = ٦٠٠ر$

- إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى $٤٠٠٠٠ = ٢٠ \times ,٠٢ = ٤٠٠ر$

ويكون التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر كما يلى :-

التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسارة

الاحتمال	مجموع الخسارة
,٨٠٠	صفر
,١٢٠	٥٠٠٠
,٠٥٠	١٠٠٠٠
,٠٢٠	٢٠٠٠٠
,٠٠٦	٣٠٠٠٠
,٠٠٤	٤٠٠٠٠
١,٠٠٠	المجموع

ولقياس الخطر يتم حساب الانحراف المعياري على النحو التالي :-

جدول رقم (٢) حساب الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر

مجموع الخسارة م	الاحتمال (م)	$\frac{م^2}{٥٠٠٠} = م^2$	$م \times ح (م)$	$م^2 \times ح (م)$
صفر	,٨٠٠	صفر	صفر	صفر
٥٠٠٠	,١٢٠	١	,١٢٠	,١٢٠
١٠٠٠٠	,٠٥٠	٢	,١٠٠	,٢٠٠
٢٠٠٠٠	,٠٢٠	٤	,٠٨٠	,٣٢٠
٣٠٠٠٠	,٠٠٦	٦	,٠٣٦	,٢١٦
٤٠٠٠٠	,٠٠٤	٨	,٠٣٢	,٢٥٦
المجموع	١,٠٠٠		,٣٦٨	١,١١٢

∴ الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\text{مجموع } ((م^2 \times ح (م)) - (\text{مجموع } (م \times ح (م)))^2 \times \frac{١}{\text{العامل المشترك}})}$

$$= \sqrt{٥٠٠٠ \times ((,٣٦٨) - ١,١١٢)^2}$$

$$= \sqrt{٥٠٠٠ \times ١٣٥٤٢٤ - ١,١١٢}$$

$$= \sqrt{٥٠٠٠ \times ٩٧٦٥٧٦}$$

$$= ٩٨٨٢١٨٥٩٩ \times ٥٠٠٠ = ٤٩٤١,٠٩٣$$

الانحراف المعياري

∴ معامل الاختلاف (قيمة الخطر) =

أقصى قيمة معرضة للخطر

$$= \frac{٤٩٤١,٠٩٣}{٤٠٠٠} = ١٢٤$$

٣- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة تعرض وحدة الخطر لأكثر من حادث والخسارة ثابتة :-

في هذه الحالة نجد أن المنشأة تمتلك وحدة خطر واحدة وتكون معرضة لأكثر من حادث خلال السنة وفي حالة تحقق أي حادث فإنه يترتب عليه خسارة ثابتة دائماً ، ونوضح من خلال المثال التالي كيفية تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر .

مثال (٣)

شركة تمتلك معرض له واجهة من الزجاج (قطعة واحدة) قيمتها ٢٠٠٠ جنية ومعرض للكسر ثلاث مرات على الأكثر خلال السنة ، وفيما يلي التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة :

التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة		التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث	
الاحتمال	قيمة الخسارة	الاحتمال	عدد الحوادث
١,٠٠	٢٠٠٠	٨٠ ,	صفر
		١٤ ,	١
١,٠٠	المجموع	٠٤ ,	٢
		٠٢ ,	٣
		١,٠٠	المجموع

المطلوب: تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر ثم قياس الخطر

الحل:

يتضح من التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث أنه إما ألا يحدث الحادث (باحتمال ٨٠ ,) وإما أن يحدث حادث واحد فقط (باحتمال ١٤ ,) وإما أن يحدث حادثين (باحتمال ٠٤ ,) وإما أن يحدث ٣ حوادث خلال السنة (باحتمال ٠٢ ,) .

كما يتضح من التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة أنها ثابتة حيث أنه في حالة حدوث الحادث فإن قيمة الخسارة دائماً ٢٠٠٠ جنية (بإحتمال ١.٠٠) ، ويترتب على ذلك .

– إنه في حالة عدم حدوث أى حادث (بإحتمال ٠.٨٠) فإن مجموع الخسائر يساوى صفر

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى صفر = إحتمال عدم حدوث أى حادث = ٠.٨٠

– وأنه في حالة حدوث حادث واحد (بإحتمال ٠.١٤) فإن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠ (بإحتمال ١.٠٠)

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠ جنية = إحتمال حدوث حادث واحد وتكون قيمته ٢٠٠٠ جنية = ١.٠٠ × ٠.٨٠ = ٠.٨٠

– وأنه في حالة حدوث حادثين (بإحتمال ٠.٠٤) فإن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠ × ٢ = ٤٠٠٠ جنية .

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٤٠٠٠ جنية = إحتمال حدوث حادثين وتكون قيمة كل حادث ٢٠٠٠ جنية = ١.٠٠ × ٠.٤ = ٠.٤

– وأنه في حالة حدوث ٣ حوادث (بإحتمال ٠.٠٢) فإن مجموع الخسائر يساوى ٢٠٠٠ × ٣ = ٦٠٠٠ جنية .

∴ إحتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٦٠٠٠ جنية = إحتمال حدوث ٣ حوادث وتكون قيمة كل حادث ٢٠٠٠ جنية = ١.٠٠ × ٠.٢ = ٠.٢

ونلاحظ مما سبق أن التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر يكون عبارة عن التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث مع ضرب قيم عمود عدد الحوادث فى قيمة الخسارة الثابتة هي ٢٠٠٠ فنحصل على التوزيع الاحتمالي التالى لمجموع الخسائر :

التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسارة

الاحتمال	مجموع الخسائر
٠.٨٠	صفر
٠.١٤	٢٠٠٠
٠.٠٤	٤٠٠٠
٠.٠٢	٦٠٠٠
١.٠٠	المجموع

ولقياس الخطر يتم تحديد الانحراف المعياري أولاً ثم قسمته على أقصى قيمة معرضة للخطر وذلك على النحو التالي :-

جدول رقم (٣) حساب الإنحراف المعياري للتوزيع الإحتمالي لمجموع الخسائر

مجموع الخسارة م	الاحتمال ح(م)	$\frac{م^2}{٢٠٠٠}$	$م \times ح(م)$	$م^2 \times ح(م)$
صفر	٠.٨٠	صفر	صفر	صفر
٢٠٠٠	٠.١٤	١	٢٨٠	٥٦٠٠
٤٠٠٠	٠.٠٤	٢	١٦٠	٦٤٠٠
٦٠٠٠	٠.٠٢	٣	١٢٠	١٢٠٠٠
المجموع	١.٠٠		٥٦٠	١٨٠٠٠

٠.٠ الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\text{مجموع } (م^2 \times ح(م)) - \frac{(\text{مجموع } (م \times ح(م)))^2}{٢}}$ X العامل المشترك

$$= \sqrt{2000 \times (28, 2) - 48}$$

$$= \sqrt{2000 \times 0.784 - 48}$$

$$= \sqrt{2000 \times 4.16}$$

$$= 0.63371918 \times 2000 = 1267,438$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف (قيمة الخطر)} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}}$$

$$= \frac{1267,438}{6000} = 0.211$$

٤- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة تعرض وحدة الخطر لأكثر من حادث والخسارة متغيرة:

في هذه الحالة نجد أن المنشأة تمتلك وحدة خطر واحدة وتكون معرضة لأكثر من حادث خلال السنة (حادثين على الأكثر أو ثلاثة على الأكثر إلخ) وقيمة الخسارة الناتجة عن أي حادث تكون متغيرة أي لها توزيع احتمالي ، ونوضح من خلال المثال التالي كيفية تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر .

مثال (٤) :

مصنع قيمة محتوياته ٥٠٠٠٠ جنية ومعرض لخطر الحريق ، وفيما يلي التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة :

التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة		التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث	
الاحتمال	قيمة الخسارة	الاحتمال	عدد الحوادث
٠,٦٠	١٠٠٠٠	٠,٨٠	صفر
٠,٣٠	٢٠٠٠٠	٠,١٥	١
٠,١٠	٤٠٠٠٠	٠,٠٥	٢
١,٠٠	المجموع	١,٠٠	المجموع

المطلوب :- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر .

أ- حساب احتمال أن مجموع الخسائر يساوى ٥٠٠٠٠

ب- حساب احتمال أن مجموع الخسائر يكون فى حدود ٥٠٠٠٠

ج- حساب احتمال أن مجموع الخسائر يزيد عن ٥٠٠٠٠

د- قياس الخطر

الحل :-

يتضح من التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث إنه إما ألا يحدث الحادث

وإحتماله ٠,٨٠ .

وإما أن يحدث حادث واحد وإحتماله ٠,١٥ وإما أن يحدث حادثين وإحتماله ٠,٠٥ .

كما يتضح من التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة أنه فى حالة حدوث حادث واحد (إحتماله

٠,١٥) فإن قيمة الخسارة قد تكون ١٠٠٠٠ جنية بإحتمال ٠,٦٠) أو ٢٠٠٠٠ بإحتمال ٠,٣٠ .

أو ٤٠٠٠٠ بإحتمال ٠,١٠ وفى حالة حدوث حادثين (إحتماله ٠,٠٥) فإن قيمة الخسارة

الناتجة عن الحادثين إما أن تكون قيمتها :

أو ١٠٠٠٠ ، ١٠٠٠٠	أى مجموع الخسائر ٢٠٠٠٠	وإحتمال ذلك هو $٦٠ \times ٦٠ = ٣٦,٠$
أو ١٠٠٠٠ ، ٢٠٠٠٠	أى مجموع الخسائر ٣٠٠٠٠	وإحتمال ذلك هو $٦٠ \times ٣٠ = ١٨,٠$
أو ١٠٠٠٠ ، ٤٠٠٠٠	أى مجموع الخسائر ٥٠٠٠٠	وإحتمال ذلك هو $٦٠ \times ١٠ = ٠,٦$
أو ٢٠٠٠٠ ، ١٠٠٠٠	أى مجموع الخسائر ٣٠٠٠٠	وإحتمال ذلك هو $٢٠ \times ٦٠ = ١٨,٠$
أو ٢٠٠٠٠ ، ٢٠٠٠٠	أى مجموع الخسائر ٤٠٠٠٠	وإحتمال ذلك هو $٢٠ \times ٢٠ = ٠,٩$
أو ٢٠٠٠٠ ، ٤٠٠٠٠	أى مجموع الخسائر ٦٠٠٠٠	وإحتمال ذلك هو $٢٠ \times ١٠ = ٠,٢$
أو ٤٠٠٠٠ ، ١٠٠٠٠	أى مجموع الخسائر ٥٠٠٠٠	وإحتمال ذلك هو $١٠ \times ٦٠ = ٠,٦$
أو ٤٠٠٠٠ ، ٢٠٠٠٠	أى مجموع الخسائر ٦٠٠٠٠	وإحتمال ذلك هو $١٠ \times ٢٠ = ٠,٢$
أو ٤٠٠٠٠ ، ٤٠٠٠٠	أى مجموع الخسائر ٨٠٠٠٠	وإحتمال ذلك هو $١٠ \times ١٠ = ٠,١$

وحيث أن النتائج السابقة تمثل جميع النتائج الممكنة فإنه يمكن عرضها فى

الجدول التالى .

جدول رقم (٥) التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر

عدد الحوادث	مجموع الخسائر	طرق وإحتمالات حدوثها
صفر	صفر	عدم حدوث أى حادث وإحتماله ٨٠٪ .
١	١٠٠٠٠	حدوث حادث واحد وأن يترتب عليه خسارة قيمتها ١٠٠٠٠ جنية $= ١٥ \times ٠.٦٠ = ٩٠$.
١	٢٠٠٠٠	حدوث حادث واحد وأن يترتب عليه خسارة قيمتها ٢٠٠٠٠ جنية $= ١٥ \times ٠.٢٠ = ٤٥$.
١	٤٠٠٠٠	حدوث حادث واحد وأن يترتب عليه خسارة قيمتها ٤٠٠٠٠ جنية $= ١٥ \times ٠.١٠ = ١٥$.
٢	٢٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ١٠٠٠٠ والثاني خسارة ١٠٠٠٠ $= ٠.٥ \times ٠.٦٠ \times ٠.٦٠ = ١٨$.
٢	٢٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ١٠٠٠٠ والثاني خسارة ٢٠٠٠٠ $= ٠.٥ \times ٠.٦٠ \times ٠.٢٠ = ٩$.
٢	٥٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ١٠٠٠٠ والثاني خسارة ٤٠٠٠٠ $= ٠.٥ \times ٠.٦٠ \times ٠.١٠ = ٣$.
٢	٤٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٢٠٠٠٠ والثاني خسارة ٢٠٠٠٠ $= ٠.٥ \times ٠.٢٠ \times ٠.٢٠ = ٤٥$.
٢	٢٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٢٠٠٠٠ والثاني خسارة ١٠٠٠٠ $= ٠.٥ \times ٠.٢٠ \times ٠.٦٠ = ٩٠$.
٢	٦٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٢٠٠٠٠ والثاني خسارة ٤٠٠٠٠ $= ٠.٥ \times ٠.٢٠ \times ٠.١٠ = ١٥$.
٢	٨٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٤٠٠٠٠ والثاني خسارة ٤٠٠٠٠ $= ٠.٥ \times ٠.١٠ \times ٠.١٠ = ٥٥٠٠٠$.
٢	٥٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٤٠٠٠٠ والثاني خسارة ١٠٠٠٠ $= ٠.٥ \times ٠.١٠ \times ٠.٦٠ = ٣٠$.
٢	٦٠٠٠٠	حدوث حادثين وأن ينتج عن الأول خسارة ٤٠٠٠٠ والثاني خسارة ٢٠٠٠٠ $= ٠.٥ \times ٠.١٠ \times ٠.٢٠ = ١٥$.
المجموع		١,٠٠

وبتجميع الاحتمالات الخاصة بالقيم المتساوية لمجموع الخسائر نحصل على

التوزيع الاحتمالي التالي :

جدول رقم (٥) التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر

الاحتمال	مجموع الخسائر
, ٨٠	صفر
, ٠٩٠	١٠٠٠٠
, ٠٦٣	٢٠٠٠٠
, ٠١٨	٣٠٠٠٠
, ٠١٩٥	٤٠٠٠٠
, ٠٠٦	٥٠٠٠٠
, ٠٠٣	٦٠٠٠٠
, ٠٠٠٥	٨٠٠٠٠
١, ٠٠	المجموع

ومن التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر يمكن حساب الاحتمالات المطلوبة حيث

- احتمال أن مجموع الخسائر يساوى $٥٠٠٠٠ = , ٠٠٦$,

- احتمال أن مجموع الخسائر يكون فى حدود $٥٠٠٠٠ =$ احتمال أن مجموع الخسائر يساوى أو يقل عن ٥٠٠٠٠

$$, ٠٠٦ + , ٠١٩٥ + , ٠١٨ + , ٠٦٣ + , ٠٩٠ + , ٨٠ = , ٩٩٦٥$$

- احتمال أن مجموع الخسائر يزيد عن $٥٠٠٠٠ =$ احتمال أن مجموع الخسائر يساوى أو يزيد عن ٦٠٠٠٠

$$, ٠٠٣ + , ٠٠٠٥ = , ٠٠٣٥$$

ولقياس الخطر يتم حساب الانحراف المعيارى وذلك على النحو التالى :

جدول رقم (١٧) حساب الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي
لمجموع الخسائر

مجموع الخسارة م	الاحتمال ح (م)	$\frac{م}{١٠٠٠٠} = \frac{م}{١٠٠٠٠}$	$\frac{م}{١٠٠٠٠} = \frac{م}{١٠٠٠٠}$	$\frac{م}{١٠٠٠٠} = \frac{م}{١٠٠٠٠}$
صفر	٨٠ر	صفر	صفر	صفر
١٠٠٠	٩٠ر	١	٩٠ر	٩٠ر
٢٠٠٠	٦٣ر	٢	١٢٦ر	٢٥٢ر
٣٠٠٠	١٨ر	٣	٥٤ر	١٢٦ر
٤٠٠٠	١٩٥ر	٤	٧٨ر	٣١٢ر
٥٠٠٠	٦ر	٥	٣٠ر	١٥٠ر
٦٠٠٠	٣ر	٦	١٨ر	١٠٨ر
٨٠٠٠	٥ر	٨	٠٤ر	٣٢ر
المجموع	١٠٠ر		٤ر	١٠٦ر

٠ . ٠ المتوسط م = مج (م) X ح (م) العامل المشترك = ٤ ر X ١٠٠٠٠ = ٤٠٠٠

٠ . ٠ الانحراف المعياري σ م = $\sqrt{\text{مج} \left(\frac{م}{١٠٠٠٠} \right) X \text{ح} \left(\frac{م}{١٠٠٠٠} \right) - \left(\frac{\text{مج} (م) X \text{ح} (م)}{١٠٠٠٠} \right)^2}$

$$= ١٠٠٠٠ X (٤ر)^2 - ١٠٦ر =$$

$$= ١٠٠٠٠ X ١٦ - ١٠٦ر =$$

$$= ١٦٤٦ر - ١٠٦ر =$$

$$\sigma = 972625312 \text{ ر} \quad X = 10000 \text{ ر} \quad 9726253 = 10000 \text{ ر}$$

$$\sigma = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط}} = \frac{9726253}{4000} = 2432 \text{ ر}$$

$$\text{أو معامل الاختلاف (قيمة)} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}} = \frac{9726253}{8000} = 122 \text{ ر}$$

ملاحظة هامة:

يمكن قياس الخطر بطريقة مبسطة في حالة وجود توزيع احتمالي لعدد الحوادث وتوزيع احتمالي لقيمة الخسارة (تعدد الحوادث وتغير قيمة الخسارة) دون الحاجة إلى الحصول على التوزيع الاحتمالي للخسائر (خاصة إذا لم يكن مطلوباً تحديد التوزيع أو استخدامه في حساب احتمالات معينة خاصة بمجموع الخسائر) وذلك من خلال استخدام العلاقة التالية :

متوسط التوزيع الاحتمالي للخسائر =

(متوسط توزيع عدد الحوادث X متوسط توزيع قيمة الخسارة) X عدد الوحدات

$$\text{أي أن } \bar{X} = (\bar{X} \text{ و } \bar{X}) \sim X \quad (1)$$

حيث \bar{X} = متوسط التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر .

$$\bar{X} = \text{متوسط التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث (معدل تكرار الحادث)}$$

\bar{x} = متوسط التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث (معدل تكرار الحادث)

n = عدد الوحدات المعرضة للخطر .

كما أن الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر =

$$\sqrt{[(\text{متوسط عدد الحوادث} \times \text{تباين قيمة الخسارة}) + (\text{مربع متوسط الخسارة} \times \text{تباين عدد الحوادث})] \times n}$$

$$\text{أى } \sigma^2 : n = \frac{[(\sigma^2 \times \bar{x}) + (\bar{x}^2 \times \sigma^2)] \times n}{n}$$

وبحساب قيم \bar{x} ، σ^2 ، \bar{x} ، σ^2 من بيانات التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر فى

المثال السابق نحصل على ما يلى :

جدول رقم (١٨) حساب المتوسط والانحراف المعياري لعدد الحوادث

عدد الحوادث n	الاحتمال $h(n)$	$n \times h(n)$	$n^2 \times h(n)$
صفر	٨٠ر	صفر	صفر
١	١٥ر	١٥ر	١٥ر
٢	٥ر	١٠ر	٢٠ر
المجموع	١٠٠ر	٢٥ر	٣٥ر

$$\bar{x} = \frac{\sum (n \times h(n))}{\sum h(n)} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (n^2 \times h(n))}{\sum h(n)} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{35}{100} - (0.25)^2 = 0.35 - 0.0625 = 0.2875$$

$$\sigma = \sqrt{0.2875} = 0.5362$$

$$\sqrt{350 - 0.625} =$$

$$\therefore \sigma \sim \sqrt{2875} = 53619.264 \text{ ر}$$

جدول رقم (١٩) حساب المتوسط والانحراف المعياري لقيمة الخسارة

قيمة الخسارة س	الاحتمال ح (س)	س = $\frac{\text{س}}{10000}$	س/ح (س/س)	س ^٢ X ح (س)
١٠٠٠٠	٠.٦	١	٠.٦	٠.٦
٢٠٠٠٠	٠.٣	٢	٠.٦	٠.٢
٤٠٠٠٠	٠.١	٣	٠.٤	٠.٠٤
المجموع	١.٠	٢٥	١.٦	٢.٤

$$\therefore \bar{س} = \text{مجم} = (س \times ح (س)) \text{ العامل المشترك } X$$

$$\therefore \bar{س} = 16000 = 10000 \times 1.6$$

$$\therefore \sigma^2 = \text{مجم} = (س^2 \times ح (س)) - (\text{مجم } س \times ح (س))^2$$

$$= \sqrt{10000 \times (1.6^2) - 2.4^2}$$

$$= \sqrt{10000 \times 2.56 - 2.4^2}$$

$$= \sqrt{10000 \times 2.56}$$

$$\therefore \sigma = 16015.129 = 10000 \times 1.60151$$

$$\therefore \bar{م} = \bar{س} \times \bar{س} \sim$$

$$\therefore \bar{م} = 25 = 1 \times 16000 \times 25$$

حيث \sim تمثل عدد الوحدات المعرضة للخطر وهى فى هذا المثال وحدة واحدة

$$\sigma \cdot \sigma = \sqrt{(\sigma^2 \cdot \sigma^2) + (\sigma^2 \cdot \sigma^2)}$$

$$= \sqrt{(1 \times 1) + (16000 \times 16000)}$$

$$= \sqrt{1 + 256000000}$$

$$= \sqrt{256000001} = 16000.00003$$

وهى نفس النتائج السابق الحصول عليها

أسئلة على الوحدة الدراسية الرابعة عشرة

(١) شركة الحمد للنقل السياحي لديها سيارة مكيفة تبلغ قيمتها ٢٠٠٠٠٠ جنيه وفيما يلي بيان عن التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة الواحدة :

التوزيع الاحتمالي لعدد الخسارة		التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث	
الاحتمال	قيمة الخسارة	الاحتمال	عدد الحوادث
٨٠ر	١٠٠٠٠	٧٠ر	صفر
١٥ر	٢٠٠٠٠	٢٥ر	١
٥ر	٣٠٠٠٠	٥ر	٢

المطلوب : تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر

- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٥٠٠٠٠ جنيه
- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٥٠٠٠٠ جنيه على الأقل
- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى أقل من ٥٠٠٠٠ جنيه
- قياس الخطر .

(٢) شركة الخليج لبيع اللوحات الفنية لديها معرض له واجهة من الزجاج قيمتها ٥٠٠٠ جنيه، وفيما يلي بيان عن التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث والتوزيع الاجمالى لقيمة الخسارة سنوياً :

التوزيع الاحتمالى لعدد الخسارة		التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث	
الاحتمال	قيمة الخسارة	الاحتمال	عدد الحوادث
١ر٠٠	٥٠٠٠	٧٠ر	صفر
		٢٠ر	١
		٠٨ر	٢
		٠٢ر	٣

المطلوب : تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية

- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية لا يقل ١٠٠٠٠ جنيه .
- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية يزيد عن ١٠٠٠٠ جنيه .
- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ١٥٠٠٠ جنيه
- قياس الخطر .

(٣) فيما يلى « بيان عن التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر السنوية لسيارات شركة الضياء للنقل السياحى :

مجموع الخسائر	صفر	٥٠٠	١٠٠٠	٥٠٠٠	١٠٠٠٠	٢٥٠٠٠	٥٠٠٠٠	المجموع
الاحتمال	٨٠ر	١٥ر	٠٣ر	٠١ر	٠٧ر	٠٢ر	٠١ر	١ر٠٠

- ماهو احتمال أن تتعرض الشركة لخسارة فى العام القادم
- ماهو احتمال أن تتعرض الشركة لخسائر مجموعها ٥٠٠٠ جنيه على الأقل .
- ماهو متوسط مجموع الخسائر (القيمة المتوقعة لمجموع الخسائر السنوية)

- إذا كان الانحراف المعياري هو مبلغ ٢٢٠٠ جنيه ما هو تقديرك لقيمة الخطر .
- إذا كان معدل تكرار الحوادث المتوقع ٥٠ فما هو تقديرك لمتوسط الخسارة الواحدة.
- حدد أقصى خسارة ممكنة .
- حدد أقصى خسارة محتملة متخذاً معيار أقل من ١٪.

الوحدة الدراسية الخامسة عشر
تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع
الخسائر في حالة وجود عدة وحدات
للخطر ثم قياس الخطر

الوحدة الدراسية الخامسة عشر

موضوعها : تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر في حالة وجود عدة وحدات للخطر ثم قياس الخطر .

هدفها : تعريف الطالب بكيفية إعداد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر وحساب متوسطه وتباينه في حالة وجود أكثر من وحدة خطر.

عناصرها :

- حساب متوسط وتباين عدد الحوادث لوحدة خطر واحدة .
- حساب متوسط وتباين قيمة الخسارة لوحدة خطر واحدة .
- حساب متوسط وتباين مجموع الخسائر لوحدة خطر واحدة .
- حساب متوسط وتباين مجموع الخسائر لعدة وحدات خطر .

تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر فى حالة وجود عدة وحدات للخطر :

فى هذه الحالة يكون لدى المنشأة العديد من وحدات الخطر المتماثلة (سيارات، سفن، طائرات، منازل) وكل وحدة تكون معرضة لحادث واحد على الأكثر خلال السنة أو الأكثر من حادث خلال السنة، وفى كلتا الحالتين فإنه يترتب على الحادث إما خسارة ثابتة فى كل مرة أو تتغير قيمتها من حادث لآخر (خسارة متغيرة)، وفى حالة وجود عدة وحدات للخطر فإنه يصعب تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر بالطريقة السابقة ولكن تستخدم طرق تقريبية أخرى لتحديده منها:

- ١- التقريب باستخدام التوزيع الطبيعى The normal approximation
- ٢- التقريب باستخدام طريقة تشيبيشيف The chebyshev method
- ٣- التقريب باستخدام ألين ديوفسال The Allen- Duvall method
- ٤- التقريب باستخدام دالة القوى الطبيعية The normal power method
- ٥- التقريب باستخدام توزيع تـ The student T distribution
- ٦- التقريب باستخدام متسلسلة إيجورث Edgeworth series
- ٧- التقريب باستخدام طريقة جونسون وآخرين.
- ٨- التقريب باستخدام طريقة بومان - شنتون.
- ٩- التقريب باستخدام طريقة كارل بيرسون.
- ١٠- التقريب باستخدام طريقة المحاكاة Simulation
- ١١- التقريب باستخدام بعض الطرق الرياضية الأخرى التى تعتمد على عمليات التكامل.

ومع توافر الحاسبات الآلية وظهور أجيال جديدة تتميز بالسرعة الفائقة لإجراء العمليات الحسابية بالإضافة إلى القدرة الهائلة لتخزين البيانات وكتابة برنامج بسيط يمكن الوصول إلى التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر (دون تحديد شكل أو اسم التوزيع) وذلك بمعلومية المتوسط والتباين.

وقد توصل Hon- shiang lau إلى العزوم الأربعة الأولى للتوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر لوحدة واحدة وأثبت أن:

$$\bar{m} = \bar{s} \times \bar{m}$$

$$\bar{m}^2 = \bar{s}^2 \sigma^2 + \bar{s}^2 \sigma^2 \times \bar{m}^2$$

وقد توصل Thomas A . Aiuppa إلى العزوم الأربعة الأولى للتوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر لعدة وحدات وأثبت أن

$$\bar{m} \times (\bar{s} \times \bar{m}) = \bar{m}^2$$

$$\bar{m} \times (\bar{s}^2 \sigma^2 + \bar{s}^2 \sigma^2 \times \bar{m}^2) = \bar{m}^2 \sigma^2$$

حيث \bar{m} عدد الوحدات المعرضة للخطر .

وتفيد المعادلتان السابقتان في قياس الخطر في حالة توافر عدد كبير من الوحدات المعرضة للخطر سواء كانت كل وحدة معرضة لحادث على الأكثر أو لأكثر من حادث خلال السنة وسواء كانت قيمة الخسارة الناتجة عن كل حادث ثابتة أو متغيرة.

ونوضح من خلال الأمثلة التالية كيفية استخدام البيانات الخاصة بعدد الحوادث وقيم الخسائر في ظل توافر عدد كبير من الوحدات المعرضة للخطر في قياس الخطر بواسطة المعادلتين الخاصتين بحساب متوسط وتباين مجموع الخسائر.

مثال (١) :

فيما يلي بيان عن التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة لحل لبيع اللوحات الفنية :

التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة

عدد الحوادث	الاحتمال	قيمة الخسارة	الاحتمال
صفر	٨٠ر	٢٠٠٠	١٠٠ر
١	٢٠ر		
المجموع	١٠٠ر	المجموع	١٠٠ر

فإذا علمت أن المحل به ٢٢٥ لوحة وقيمة اللوحة ٢٠٠٠ جنيه، حدد قيمة الخطر.

الحل :

حتى يمكن قياس الخطر فلا بد من حساب متوسط مجموع الخسائر وتباين مجموع الخسائر وهما دالتين فى متوسط وتباين توزيع عدد الحوادث وتوزيع قيمة الخسارة ويتم حسابهم على النحو التالى:

جدول رقم (١) حساب متوسط وتباين توزيع عدد الحوادث

عدد الحوادث \sim	الاحتمالى $ح(\sim)$	$\sim \times ح(\sim)$	$\sim^2 \times ح(\sim)$
صفر	٨٠ر	صفر	صفر
١	٢٠ر	٢٠ر	٢٠ر
المجموع	١٠٠ر	٢٠ر	٢٠ر

∴ متوسط عدد الحوادث $\bar{\sim} = \sim \times ح(\sim)$

$$\bar{\sim} = ٢٠ر$$

∴ تباين عدد الحوادث $\sigma^2_{\sim} = مج[\sim^2 \times ح(\sim)] - [مج(\sim \times ح(\sim))]^2$

$${}^2_{(20)} - 20 =$$

$$\dots \sigma^2 = 20 - 20.4 = 16$$

جدول رقم (٢) لحساب متوسط وتباين توزيع قيمة الخسارة

عدد الخسارة س	الاحتمالي ح (س)	س × ح (س)	س ^٢ × ح (س)
٢٠٠٠	١٠٠	٢٠٠٠	٤٠٠٠٠٠
المجموع	١٠٠	٢٠٠٠	٤٠٠٠٠٠

... متوسط قيمة الخسارة $\bar{s} = s \times h (s)$

$$\bar{s} = 2000$$

... تباين قيمة الخسارة $\sigma^2 =$

$$\text{مج} [(s^2 \times h(s)) - (\text{مج} (s \times h(s)))]$$

$$= 400000 - 200000 =$$

$$\sigma^2 = 400000 - 200000 = \text{صفر}$$

... متوسط مجموع الخسائر لوحدة خطر واحدة $\bar{m} = \bar{s} \times$

$$\dots m = 20 \times 2000 = 400 \text{ جنية}$$

... تباين مجموع الخسائر لوحدة واحدة $\sigma^2 = \sigma^2 \times \bar{m} +$

$$= 20 \times 16 + \text{صفر} \times 2000 =$$

$$\sigma^2 \mu = \text{صفر} + ١٦ \times ٤٠٠٠٠٠ = ٦٤٠٠٠٠$$

وحيث أن متوسط مجموع الخسائر لعدة وحدات =

متوسط مجموع الخسائر لوحدة واحدة \times عدد الوحدات

$$٩٠٠٠٠ = ٢٢٥ \times ٤٠٠ =$$

وأيضاً تباين مجموع الخسائر لعدة وحدات =

تباين مجموع الخسائر لوحدة واحدة \times عدد الوحدات

$$١٤٤٠٠٠٠٠ = ٢٢٥ \times ٦٤٠٠٠٠ =$$

وحيث أن أقصى قيمة معرضة للخطر لكل وحدة تساوى قيمة الشئ = ٢٠٠٠

فإن أقصى قيمة معرضة للخطر لعدد ٢٢٥ وحدة أو قيمة الشئ

$$٤٥٠٠٠٠ = ٢٢٥ \times ٢٠٠٠ =$$

∴ قيمة الخطر (معامل الاختلاف) = $\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{متوسط مجموع الخسائر}}$

$$= \frac{\sqrt{\sigma^2 \mu}}{\mu}$$

$$= \frac{\sqrt{١٤٤٠٠٠٠٠}}{٩٠٠٠٠}$$

$$= \frac{١٢٠٠٠}{٩٠٠٠٠} = ١٣٣٣$$

أو قيمة الخطر (معامل الاختلاف) = $\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر (قيمة الشئ)}}$

$$٠.٢٦٦ = \frac{١٢.٠٠٠}{٤٥.٠٠٠} =$$

ملاحظة:

١- يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر لوحدة واحدة ومنه يتم حساب المتوسط والتباين ثم بضربهما في عدد الوحدات المعرضة للخطر نحصل على المتوسط والتباين للتوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر الخاص بعدد الوحدات المطلوب وهو ٢٢٥ وحدة وذلك كما يلي:

جدول رقم (٣) التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر

مجموع الخسائر م	الاحتمال ح (م)	م × ح (م)	م ^٢ × ح (م)
صفر	٨٠ر	صفر	صفر
٢٠٠٠	٢٠ر	٤٠٠	٨٠٠٠٠
المجموع	١٠٠ر	٤٠٠	٨٠٠٠٠

... متوسط مجموع الخسائر م̄ = مج [م × ح (م)]

$$٤٠٠ =$$

، تباين مجموع الخسائر σ_م^٢ = مج [م^٢ × ح (م)] - [مج (م × ح (م))]^٢

$$= ٨٠٠٠٠ - (٤٠٠)^٢$$

$$= ١٦٠٠٠٠ - ٨٠٠٠٠ = ٨٠٠٠٠$$

... متوسط مجموع الخسائر لعدد ٢٢٥ وحدة = ٢٢٥ × ٤٠٠ = ٩٠٠٠٠

، تباين مجموع الخسائر لعدد ٢٢٥ وحدة =

$$١٤٤٠٠٠٠٠ = ٢٢٥ \times ٦٤٠٠٠٠$$

وهما نفس القيمتين اللتين سبق الحصول عليهما بالطريقة السابقة.

٢- كما يمكن قياس الخطر بالنسبة لوحدة واحدة حيث :

$$\text{قيمة الخطر (معامل الاختلاف) لوحدة واحدة} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{متوسط الخسائر}}$$

$$\frac{\sqrt{٦٤٠٠٠٠}}{٤٠٠} =$$

$$٢ = \frac{٨٠٠}{٤٠٠} =$$

أو أن قيمة الخطر (معامل الاختلاف) لوحدة واحدة

$$= \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر أو قيمة الشئ}}$$

$$\frac{\sqrt{٦٤٠٠٠٠}}{٢٠٠٠} =$$

$$٤ = \frac{٨٠٠}{٢٠٠٠} =$$

$$\text{وباستخدام العلاقة : قيمة الخطر الجديد} = \frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{J}}$$

$$\text{حيث ل} = \frac{\text{عدد الوحدات الجديدة}}{\text{عدد الوحدات القديمة}} = \frac{225}{1} = 225$$

$$10 = \sqrt{225} = \sqrt{ل}$$

$$\text{قيمة الخطر الجديد} = \frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\sqrt{ل}}$$

$$\text{قيمة الخطر الجديد} = \frac{2}{10} = 0.2 \text{ ر. 1333}$$

$$\text{أو قيمة الخطر الجديد} = \frac{4}{10} = 0.4 \text{ ر. 266}$$

وهما أيضاً نفس النتيجة التي سبق الحصول عليها بالطريقتين السابقتين ولكن بطريقة مبسطة.

ومن خلال الملاحظة السابقة نصل إلى نتيجة هامة وهي :

في حالة وجود عدد كبير من الوحدات المتماثلة المعرضة للخطر فإنه يمكن قياس الخطر دون الحصول على التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر وذلك بقياس الخطر لوحدة واحدة حيث :

قيمة الخطر لوحدة واحدة (معامل الاختلاف)

$$= \frac{\text{الانحراف المعياري لمجموع الخسائر}}{\text{متوسط مجموع الخسائر أو مجموع أقصى قيم معرضة للخطر أو مجموع القيم}}$$

$$\text{قيمة الخطر الجديد (لعدة وحدات)} = \frac{\text{قيمة الخطر القديم (لوحدة واحدة)}}{\frac{\text{عدد الوحدات الجديد}}{\text{عدد الوحدات القديم}}}$$

وحيث أن عدد الوحدات القديم هو وحدة واحدة فإن القيمة تحت الجذر تساوى $\sqrt{\text{عدد الوحدات}}$ أى تساوى \sqrt{n} .

ويتضح من خلال المثال التالى أهمية استخدام هذه العلاقة فى تبسيط أسلوب قياس الخطر

مثال (٢) شركة ومبى لديها ١٤٤ فرعاً متماثلاً قيمة محتويات كل فرع ٥٠٠٠٠ جنية وكل فرع معرض لخطر الحريق، وفيما يلى التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة لكل فرع :

التوزيع الاحتمالى لقيمة الخسارة		التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث	
قيمة الخسارة	الاحتمال	عدد الحوادث	الاحتمال
١٠٠٠٠	٠.٦	صفر	٠.٨
٢٠٠٠٠	٠.٣	١	٠.١٥
٤٠٠٠٠	٠.١	٢	٠.٠٢
المجموع	١.٠	المجموع	١.٠

المطلوب : قياس الخطر .

الحل:

نلاحظ أن بيانات هذا المثال هى نفس بيانات مثال (٤) فى الوحدة الرابعة عشر مع إختلاف أن عدد الوحدات فى هذا المثال ١٤٤ وحدة، ويمكن حساب قيمة الخطر بثلاثة طرق:

الطريقة الأولى: تحديد التوزيع الاحتمالى لمجموع الخسائر لوحدة واحدة أولاً

وإستخدامه فى حساب μ (متوسط مجموع الخسائر لوحدة واحدة)،

σ (الانحراف المعيارى لمجموع الخسائر لوحدة واحدة) ومنهما يتم

حساب \bar{m} (متوسط مجموع الخسائر لـ n من الوحدات)، σ
 (الانحراف المعياري لمجموع الخسائر لـ n من الوحدات) وذلك على
 النحو التالي :

١- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر لوحدة واحدة ومنه يتم حساب المتوسط والانحراف المعياري .

وقد سبق لنا تحديد هذا التوزيع والمتوسط والانحراف المعياري (راجع مثال (٤) في الوحدة الرابعة عشر وكان كما يلي .

جدول رقم (٤) حساب المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر

مجموع الخسائر m	الاحتمال $P(m)$	$\frac{m^2}{10000}$	$m \times P(m)$	$m^2 \times P(m)$
صفر	٠.٨٠	صفر	صفر	صفر
١٠٠٠	٠.٩٠	١	٠.٩٠	٠.٩٠
٢٠٠٠	٠.٦٣	٢	١.٢٦	٢.٥٢
٣٠٠٠	٠.١٨	٣	٠.٥٤	١.٦٢
٤٠٠٠	٠.١٩٥	٤	٠.٧٨	٣.١٢
٥٠٠٠	٠.٠٦	٥	٠.٣٠	١.٥٠
٦٠٠٠	٠.٠٣	٦	٠.١٨	١.٠٨
٨٠٠٠	٠.٠٠٥	٨	٠.٠٤	٠.٣٢
المجموع	١.٠٠		٤	١١.٦

$$\therefore \text{المتوسط } \bar{m} = 4 \times 1000 = 4000$$

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma_m = \sqrt{(١٠٠٠٠ \times (١٠٠ - ١٠٠.٦) - ١٠٠٠ \times (١٠٠ - ١٠٠.٦)^2)}$$

$$١٠٠٠٠ \times (١٠٠ - ١٠٠.٦) =$$

$$١٠٠٠٠ \times ٩٩.٤ =$$

$$٩٩٤٠٠٠ = ١٠٠٠٠ \times ٩٩.٤ =$$

$$\text{التباين } \sigma_m^2 = (٩٩٤٠٠٠) = ٩٨٨٠٠٠٠$$

٢- حساب المتوسط والانحراف المعياري في حالة وجود ١٤٤ وحدة

$$\text{المتوسط } \bar{m} = \frac{\sum m \times f}{\sum f}$$

$$٥٧٦٠٠٠ = ١٤٤ \times ٤٠٠٠ =$$

$$\text{والتباين } \sigma_m^2 = \frac{\sum m^2 \times f}{\sum f} - (\bar{m})^2$$

$$١٣٦٢٢٤٠٠٠٠ = ١٤٤ \times ٩٤٦٠٠٠٠ =$$

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma_m = \sqrt{١٣٦٢٢٤٠٠٠٠} = ١١٦٧١٥.٣٨$$

$$\text{أقصى قيمة معرضة للخطر} =$$

أقصى قيمة معرضة للخطر لوحدة واحدة \times عدد الوحدات

$$١١٥٢٠٠٠ = ١٤٤ \times ٨٠٠٠ =$$

مجموع قيم الاشياء = قيمة الشيء لوحدة واحدة \times ١٤٤

$$٧٢٠٠٠٠ = ١٤٤ \times ٥٠٠٠ =$$

٣- قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$\text{الانحراف المعياري} = \frac{١١٦٧١٥.٣٨}{٥٧٦٠٠٠} = \frac{١١٦٧١٥.٣٨}{٥٧٦٠٠٠} = ٢.٠٢٦$$

أو قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$0.101 = \frac{1167150.38}{11520000} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}}$$

أو قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$0.162 = \frac{1167150.38}{7200000} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{مجموع قيم الأشياء}}$$

الطريقة الثانية: حساب \sim (متوسط عدد الحوادث لوحدة واحدة)، $\sigma^2 \sim$ (التباينأو مربع الانحراف المعياري لعدد الحوادث) وأيضاً حساب σ (متوسط قيمة الخسارة الواحدة)، $\sigma^2 \sim$ (التباين أو مربع الانحرافالمعياري لقيمة الخسارة) وإستخدامهم فى حساب σ (متوسط مجموعالخسائر لوحدة واحدة)، $\sigma^2 \sim$ (التباين أو مربع الانحراف المعياريلمجموع الخسائر لوحدة واحدة) وأخيراً حساب σ (متوسطمجموع الخسائر لعدة وحدات)، $\sigma^2 \sim$ (التباين أو مربع الانحراف

المعياري لمجموع الخسائر لعدة وحدات). وذلك على النحو التالى:

١- حساب متوسط وتباين عدد الحوادث لوحدة واحدة .

جدول رقم (٥)

حساب المتوسط والانحراف المعياري لعدد الحوادث

عدد الحوادث \sim	الاحتمال $ح(\sim)$	$\sim \times ح(\sim)$	$\sim^2 \times ح(\sim)$
صفر	٨٠ر	صفر	صفر
١	١٥ر	١٥ر	١٥ر
٢	٢ر	١٠ر	٢٠ر
المجموع	١٠٠ر	٢٥ر	٣٥ر

$$\dots = \bar{\mu} = \text{مـجـ} (\bar{\mu} \times \text{ح})$$

$$= ٢٥ \text{ ر}$$

$$\dots = \sigma = \sqrt{\text{مـجـ} (\bar{\mu}^2 \times \text{ح}) - (\text{مـجـ} (\bar{\mu} \times \text{ح}))^2}$$

$$= \sqrt{٢٥(٢٥) - ٦٢٥}$$

$$= \sqrt{٢٥ - ٠.٦٢٥}$$

$$\sigma = \sqrt{٢٨٧٥} = ٥٣٦١٩.٢٦٤ \text{ ر}$$

$$\dots = \bar{\mu} = ٢٨٧٥ \text{ ر}$$

٢- حساب متوسط وتباين قيمة الخسارة لوحدة واحدة :

جدول رقم (٦)

حساب المتوسط والانحراف المعياري لقيمة الخسارة

قيمة الخسائر س	الاحتمال ح (س)	$\frac{\text{س}}{\dots} = \text{س'}$	$\text{س'} \times \text{ح (س)}$	$\text{س'}^2 \times \text{ح (س)}$
١٠٠٠٠	٦٠ ر	١	٦٠ ر	٦٠ ر
٢٠٠٠٠	٣٠ ر	٢	٦٠ ر	١٢٠ ر
٤٠٠٠٠	١٠ ر	٤	٤٠ ر	١٦٠ ر
المجموع	١٠٠ ر		١٦٠ ر	٢٤٠ ر

$$\bar{\mu} = \text{مـجـ} (\text{س'} \times \text{ح (س)}) \times \text{العامل المشترك}$$

$$= ١٦٠٠٠ = ١٠٠٠٠ \times ١٦٠$$

$$\sigma_s = \sqrt{\text{مج} (س^2 \times ح (س)) - (\text{مج} (س \times ح (س)))^2} \times \text{العامل المشترك}$$

$$= \sqrt{10000 \times (16 - 3.4)} =$$

$$\sigma_s = \sqrt{10000 \times 12.6} =$$

$$= \sqrt{10000 \times 12.6} =$$

$$= 916.5139 = 10000 \times 9.165139 =$$

$$\sigma_s = 84.00000$$

٣- حساب متوسط وتباين دالة مجموع الخسائر لوحدة واحدة

$$\bar{m} = \bar{s} \times s$$

$$= 25 \times 1600 = 40000$$

$$\sigma_m^2 = \sigma_s^2 \times \bar{s} + \sigma_s \times \bar{s} = \sigma_m^2$$

$$= 25 \times 84.00000 + 25600000 \times 2875 =$$

$$= 2100000 + 73600000 = 94600000$$

٤- حساب متوسط وتباين دالة مجموع الخسائر لعدة وحدات :

$$\bar{m} \times \bar{s} = \bar{m}$$

$$= 144 \times 4000 = 576000$$

$$\sigma_m^2 \times \bar{s} = \sigma_m^2$$

$$= 144 \times 94600000 = 13622400000$$

$$\sigma_m = 1167150.38$$

أقصى قيمة معرضة للخطر =

أقصى خسارة للوحدة الواحدة × أقصى عدد حوادث × عدد الوحدات

$$11520000 = 144 \times 2 \times 40000 =$$

مجموع قيم الأشياء = قيمة الشيء لوحدة واحدة × عدد الوحدات

$$7200000 = 144 \times 50000 =$$

٥- قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$2.26 = \frac{1167150.38}{576000} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط}}$$

أو قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$1.1 = \frac{1167150.38}{11520000} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}}$$

أو قيمة الخطر (معامل الاختلاف)

$$1.62 = \frac{1167150.38}{7200000} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{مجموع قيم الأشياء}}$$

الطريقة الثالثة: حساب σ (متوسط عدد الحوادث لوحدة واحدة)، σ (التباين)

لعدد الحوادث لوحدة واحدة) وأيضاً حساب σ (متوسط قيمة

الخسارة الواحدة)، σ (التباين لقيمة الخسارة لوحدة الواحدة)

وإستخدامهم في تحديد σ (متوسط مجموع الخسائر لوحدة واحدة)،

σ (التباين لمجموع الخسائر لوحدة واحدة) وقياس الخطر لوحدة

واحدة ومنه يمكن قياس الخطر لعدة وحدات باستخدام العلاقة :

$$\sqrt{L} = \frac{\text{قيمة الخطر القديم}}{\text{قيمة الخطر الجديد}}$$

حيث ل تمثل النسبة بين عدد الوحدات الجديد وعدد الوحدات القديم ويتم ذلك على النحو التالي :

١- حساب متوسط وتباين عدد الحوادث لوحدة واحدة :

$$\bar{N} = \text{مجم} (N \times H) =$$

$$= 25$$

$$\sigma_N = \sqrt{\text{مجم} (N^2 \times H) - (\text{مجم} (N \times H))^2}$$

$$= \sqrt{250 - (25)^2}$$

$$= \sqrt{0.625 - 25}$$

$$\sigma_N = \sqrt{2875} = 53.619.264$$

$$\sigma_N = 2875$$

٢- حساب متوسط وتباين قيمة الخسارة لوحدة واحدة

$$\bar{S} = \text{مجم} (S \times H) \times \text{العامل المشترك}$$

$$= 16 \times 1000 = 16000 \text{ جنية}$$

$$\sigma_S = \sqrt{\text{مجم} (S^2 \times H) - (\text{مجم} (S \times H))^2} \times \text{العامل المشترك}$$

$$= \sqrt{16000 \times (16^2 - 34)}$$

$$= \sqrt{16000 \times 256 - 34}$$

$$= \sqrt{16000 \times 84}$$

$$\sigma_S = 916515139 = 1000 \times 9165151$$

$$٨٤٠٠٠٠٠٠ = \sigma^2_{س}$$

٣- حساب متوسط وتباين مجموع الخسارة لوحدة واحدة

$$\bar{م} = \bar{ن} \times \bar{س}$$

$$٤٠٠٠ = ١٦٠٠٠ \times ٢٥ =$$

$$\sigma^2_{م} = \sigma^2_{س} \times \bar{ن} + \bar{س} \times \sigma^2_{ن}$$

$$= ٢٥ \times ٨٤٠٠٠٠٠٠ + ١٦٠٠٠ \times ٢٨٧٥ =$$

$$٩٤٦٠٠٠٠٠ = ٧٣٦٠٠٠٠٠ + ٢١٠٠٠٠٠$$

$$\sigma_{م} = ٩٧٢٦٢٥٣$$

٤- قياس الخطر لوحدة واحدة:

$$\text{قيمة الخطر (معامل الاختلاف)} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط}}$$

$$٢٤٣١٦ = \frac{٩٧٢٦٢٥٣}{٤٠٠٠} =$$

$$\text{أو} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{أقصى قيمة معرضة للخطر}}$$

$$١٢١٦ = \frac{٩٧٢٦٢٥٣}{٨٠٠٠} =$$

$$\text{أو} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{قيمة الشيء}}$$

$$١٩٤٥ = \frac{٩٧٢٦٢٥٣}{٥٠٠٠} =$$

٥- قياس الخطر لعدد ١٤٤ وحدة :

$$\text{قيمة الخطر القديم} \div \sqrt{\text{قيمة الخطر الجديد}} =$$

$$\frac{24316}{\sqrt{144}} =$$

$$20.26 = \frac{24316}{12}$$

$$\text{أو} = \frac{1216}{12} = 10.1$$

$$\text{أو} = \frac{1945}{12} = 16.2$$

وهى نفس النتائج التى سبق الحصول عليها بالطريقتين السابقتين ولكن بطريقة

أسهل.

أسئلة على الوحدة الدراسية الخامسة عشر

١- شركة الحمد للنقل السياحي لديها سيارة مكيفة تبلغ قيمتها ٢٠٠٠٠٠ جنية وفيما يلي بيان عن التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة الواحدة .

التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة		التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث	
قيمة الخسارة	الاحتمال	عدد الحوادث	الاحتمال
١٠٠٠٠	٨٠ر	صفر	٧٠ر
٢٠٠٠٠	١٥ر	١	٢٥ر
٣٠٠٠٠	٥ر	٢	٥ر

المطلوب :

- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر .
- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٥٠٠٠٠ جنية .
- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ٥٠٠٠٠ جنية على الأقل
- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى أقل من ٥٠٠٠٠ جنية .
- قياس الخطر
- وإذا قررت الشركة شراء ٢ سيارات أخرى، ما هو تأثير ذلك على :
متوسط مجموع الخسائر السنوية، الانحراف المعياري لمجموع الخسائر السنوية، قيمة الخطر .

٢- شركة الخلد لبيع اللوحات الفنية لديها معرض له واجهة من الزجاج قيمتها ٥٠٠٠ جنية ، وفيما يلي بيان عن التوزيع الاحتمالي لعدد حوادث الكسر والتوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة سنوياً:

التوزيع الاحتمالي لقيمة الخسارة		التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث	
قيمة الخسارة	الاحتمال	عدد الحوادث	الاحتمال
٥٠٠٠	١٠٠	صفر	٧٠ر
		١	٢٠ر
		٢	٨٠ر
		٣	٢٠ر

المطلوب :

- تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر
- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية لا يقل عن ١٠٠٠٠ جنيه
- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية يزيد عن ١٠٠٠٠ جنيه
- حساب احتمال أن مجموع الخسائر السنوية يساوى ١٥٠٠٠ جنيه
- قياس الخطر .
- وإذا إفتتحت الشركة معرضين آخرين بنفس المواصفات ، فما هو تأثير ذلك على متوسط مجموع الخسائر، الانحراف المعياري لمجموع الخسائر ، قيمة الخطر.
- ٣- فيما يلى بيان عن التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر السنوية لسيارات شركة الضياء للنقل السياحي:

مجموع الخسائر	صفر	٥٠٠	١٠٠٠	٥٠٠٠	١٠٠٠٠	٢٥٠٠٠	٥٠٠٠٠	المجموع
الاحتمال	٨٠ر	١٥ر	٣٠ر	١٠ر	٧٠ر	٢٠ر	١٠ر	١٠٠

- ما هو احتمال أن تتعرض الشركة لخسارة في العام القادم .
- ما هو احتمال أن تتعرض الشركة لخسائر مجموعها ٥٠٠٠ جنيه على الأقل .
- ما هو متوسط مجموع الخسائر (القيمة المتوقعة لمجموع الخسائر السنوية) .
- إذا كان الانحراف المعياري هو مبلغ ٢٢٠٠ جنيه ما هو تقديرك لقيمة الخطر.
- إذا كان معدل تكرار الحوادث المتوقع ٥ فما هو تقديرك لمتوسط الخسارة الواحدة .

الوحدة الدراسية السادسة عشر
سعر التأمين التجاري

الوحدة الدراسية السادسة عشر

موضوعها : سعر التأمين التجارى

هدفها : تعريف الطالب بكيفية تحديد سعر التأمين التجارى ومكوناته .

عناصرها : - تحديد قسط التأمين :

- تحديد قسط التأمين الصافى

- تحديد قسط التأمين التجارى

- العمولات والمصاريف الإدارية والعمومية .

مقدمة :

سبق عند تعرضنا لعملية تسعير التأمين أن ذكرنا أن هناك مجموعة من الشروط الواجب توافرها في السعر وهي:

– أن يكون السعر كافياً .

– ألا يكون السعر مبالغاً فيه

– أن يأخذ في الاعتبار الاختلاف في درجات الخطورة،

ونوضح في هذه الوحدة كيفية تحديد قسط التأمين

مراحل تحديد قسط التأمين التجاري:

يتم تحديد قسط التأمين من خلال مرحلتين رئيسيتين وهما :

المرحلة الأولى: تحديد قسط التأمين الصافي:

حيث يتم فيها تحديد قسط التأمين الصافي الخام أو الأولى وهو يمثل التوقع الرياضي للخسائر ثم يلي ذلك تحديد قسط التأمين الصافي النهائي وهو الذي يكفي لسداد الخسائر التي يتعرض لها المؤمن لهم أخذين في الاعتبار الانحرافات التي يمكن أن تحدث بين الخسائر الفعلية والخسائر المتوقعة ويتم ذلك من خلال إضافة مخصص للانحرافات بين الخسائر الفعلية والخسائر المتوقعة (إضافة الإنحراف المعياري بعد ضربه في معامل معين كأن تضيف إنحراف معياري واحد أو ٥ أو ١ إنحراف معياري أو ٢ إنحراف معياري وتتوقف قيمة هذا المعامل على درجة الثقة المطلوبة) .

المرحلة الثانية: تحديد قسط التأمين التجاري:

حيث يتم في هذه المرحلة إضافة أعباء القسط إلى القسط الصافي النهائي، ويتمثل هذه الأعباء في :

١- العمولات .

١- المصاريف الادارية والعمومية .

٣- هامش الربح .

ويتم تحديد هذه الأعباء كنسبة من القسط التجارى نفسه من خلال الخبرة العملية وذلك على النحو التالى :

١- العمولات والمصاريف الإدارية والعمومية:

يمكن تحديد نسبة العمولات والمصاريف الإدارية والعمومية إذا نظرنا إلى الجدول التالى والذي يوضح نسبة هذه العناصر خلال فترة الخبرة :

جدول يوضح نسبة العمولات والمصاريف الادارية والعمومية فى فرع الحريق

المتوسط الحسابى	المجموع	٨٩/٨٨	٨٨/٨٧	٨٧/٨٦	٨٦/٨٥	٨٥/٨٤	السنوات
٪١٤ر٣	٪٧١ر٥	٪١٣ر٧	٪١٧ر٤	٪١١ر٦	٪١٤ر٣	٪١٤ر٥	نسبة العمولة
٪٦ر٥٦	٪٣٢ر٨	٪٤ر٨	٪٥ر٤	٪٧ر٣	٪٧ر٤	٪٧ر٩	نسبة المصاريف الادارية والعمومية
٪٢٠ر٨٦	٪١٠٤ر٣	٪١٨ر٥	٪٢٢ر٨	٪١٨ر٩	٪٢١ر٧	٪٢٢ر٤	المجموع

* المصدر : الكتاب الاحصائى السنوى للهيئة المصرية للرقابة على التأمين عن السنوات

٨٩/٨٨ - ٨٥/٨٤ .

ومن بيانات الجدول السابق يتضح لنا أن متوسط نسبة العمولات والمصاريف الإدارية

والعمومية يبلغ ٪٢٠ر٨٦ من القسط التجارى نفسه وسوف نرمز لها بالرمز ب

٢- هامش الربح :

يمثل هامش الربح نسبة تتراوح بين ٢٥٪ ، ٥٪ تقريباً من القسط التجارى، وبأخذ الحد الأدنى (نظراً لأن هذه النسبة تكون من الأقساط، وأن الأقساط تصل فى معظم الاحيان إلى أضعاف رأس المال وبالتالي ستكون مرتفعة فى حالة نسبتها إلى رأس المال). وسوف نرمز لهامش الربح بالرمز جـ

فإذا رمزنا للقسط الوحيد الصافى النهائى بالرمز أـ

وحيث أن جميع النسب السابقة (القسط الصافى النهائى ، المصاريف الإدارية والعمومية، العمولات، هامش الربح) تمثل نسبة من القسط التجارى نفسه فإن :

$$\text{القسط التجارى الوحيد} = \frac{\text{أ}}{١ - (\text{ب} + \text{ج})} \times \text{مبلغ التأمين}$$

$$\text{وبالتعويض عن ب} = ٢٠.٨٦ \%$$

$$\text{وبالتعويض عن ج} = ٢٥ \%$$

$$\therefore \text{القسط التجارى الوحيد} = \frac{\text{أ}}{١ - (٢٠.٨٦ + ٢٥)}$$

$$= \frac{\text{أ}}{١ - ٢٣.٣٦}$$

$$= \frac{\text{أ}}{٧٦.٦٤}$$

وبالتالى فإنه يتم أولاً تحديد قسط التأمين الصافى النهائى أـ وعقب ذلك يتم التعويض بها فى معادلة القسط التجارى فنحصل على القسط التجارى . ونوضح فيما يلى كيفية تحديد القسط الصافى النهائى :

تحديد قسط التأمين الصافي :

يمثل قسط التأمين الصافي القيمة المتوقعة ويتم حساب متوسط الخسائر من خلال تحديد التوزيع الاحتمالي لمجموع الخسائر أى تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير م حيث :

$$م = س_1 + س_2 + س_3 + \dots + س_n$$

$$= \sum_{r=1}^n س_r$$

حيث : س هي المتغير العشوائى الذى يرمز إلى قيمة الخسارة

، ن هي المتغير العشوائى الذى يرمز إلى عدد الخسائر

، م هي المتغير العشوائى الذى يرمز إلى مجموع قيم الخسائر التى تحدث خلال السنة وكلا من س ، ن يكون لها توزيع احتمالى نظرى الأول الخاص بقيمة الخسارة يكون لها توزيع احتمالى نظرى متصل والثانى الخاص بعدد الخسائر يكون له توزيع احتمالى نظرى منفصل، وحيث أن هناك صعوبة فى إيجاد التوزيع الاحتمالى النظرى الخاص بمجموع قيم الخسائر فإننا سوف نعتمد على المعادلتين التاليتين واللتي توصل لهما Thomas A . Aiuppa لايجاد قيم متوسط وتباين هذه الدالة والذين يتم الاعتماد عليهما فى حساب قسط التأمين الصافي الخام أو الأولى وقسط التأمين الصافي النهائى وهما:

$$\text{قسط التأمين الصافي الخام أو الأولى ج} = \bar{م} = \bar{س} \times \bar{ن}$$

$$\text{والانحراف المعياري للتوزيع } \sigma_m = \sqrt{(\bar{ن} \times \sigma_s^2) + (\bar{س}^2 \times \sigma_n^2)}$$

حيث σ_n^2 هو تباين عدد الحوادث

$\bar{س}$ هي متوسط قيمة الخسارة

$\bar{ن}$ هي متوسط عدد الحوادث

σ^2 هي تباين قيمة الخسارة

\bar{n} هي عدد الوثائق أو عدد الوحدات المعرضة للخطر

ونوضح من خلال بيانات المثال التالي كيفية تحديد قسط التأمين الصافي الخام أو الأولى ثم قسط التأمين الصافي النهائي تمهيداً لحساب قسط التأمين التجاري.

مثال ١ :

فيما يلي بيان عن توزيع مجموعة من الوثائق حسب عدد الحوادث خلال فترة الخبرة في فرع الحريق :

عدد الوثائق	عدد الحوادث
١٧٥٤٩	صفر
١١٠٤	١
٥٣	٢
٢	٣
١٨٧٠٨	المجموع

وبدراسة عدد الحوادث حسب قيمة الخسارة حصلنا على التوزيع التالي:

قيمة الخسارة	صفر	-٢٠٠٠	-٤٠٠٠	-٦٠٠٠	-٨٠٠٠	-١٠٠٠٠	-١٢٠٠٠	-١٤٠٠٠	-١٦٠٠٠	-١٨٠٠٠	-٢٠٠٠٠-٢٢٠٠٠
الاحتمال	٥٠٤	٢٥٢	١٨٦	٩١	٤٤	٢٠	١٠	٤	٢	١	١

المطلوب: تحديد قسط التأمين التجاري وأيضاً سعر التأمين لهذا الفرع إذا علمت أن

مجموع مبالغ التأمين لهذه المجموعة من الوثائق قد بلغ ٨٥٦١٧٠٢٢١ جنيهاً

$$(أ) \text{ متوسط مبلغ تأمين الوثيقة الواحدة} = \frac{٨٥٦١٧.٢٢١}{١٨٧.٨} = ٤٥٧٦٥ \text{ جنيهاً}$$

الحل :

يتم أولاً تحديد متوسط وتباين عدد الحوادث (\bar{X}, σ^2) ثم يلي ذلك تحديد متوسط وتباين قيمة الخسارة (\bar{Y}, σ^2) ثم إستخدامهما في تحديد متوسط مجموع الخسائر وتباين مجموع الخسائر وأخيراً تحديد سعر التأمين وذلك على النحو التالي :

أولاً : تحديد متوسط وتباين عدد الحوادث :

عدد الحوادث \bar{X}	عدد الوثائق ك	عدد الحوادث \times عدد الوثائق $\bar{X} \times ك$	(عدد الحوادث) \times عدد الوثائق $\bar{X}^2 \times ك$
صفر	١٧٥٤٩	صفر	صفر
١	١١٠٤	١١٠٤	١١٠٤
٢	٥٢	١٠٦	٢١٢
٣	٢	٦	١٨
المجموع	١٨٧.٨	١٢١٦	١٣٣٤

$$\therefore \text{متوسط عدد الحوادث} = \bar{X} = \frac{\text{مجموع } (\bar{X} \times ك)}{\text{مجموع ك}} = \frac{١٢١٦}{١٨٧.٨} = ٦.٤٩٩٨٩٣$$

$$\text{تباين عدد الحوادث} = \sigma^2 = \frac{\text{مجموع } (\bar{X}^2 \times ك) - \frac{(\text{مجموع } (\bar{X} \times ك))^2}{\text{مجموع ك}}}{\text{مجموع ك} - ١}$$

$$= \frac{\frac{١٢١٦^2}{١٨٧.٨} - ١٣٣٤}{١٨٧.٧} = ٦٧.٨٥١١٧$$

ثانياً : تحديد متوسط وتباين قيمة الخسارة :

فئة الخسارة	التكرار ك	مركز فئة الخسارة س	مركز فئة الخسارة × التكرار س × ك	(مركز فئة الخسارة) ^٢ × التكرار س ^٢ × ك
صفر-	٥٠٤	١٠٠٠	٥٠٤٠٠٠	٦١٠ × ٥٠٤٠٠٠
-٢٠٠٠	٢٥٢	٣٠٠٠	١٠٥٦٠٠٠	٦١٠ × ٣١٦٨
-٤٠٠٠	١٨٦	٥٠٠٠	٩٣٠٠٠٠	٦١٠ × ٤٦٥٠
-٦٠٠٠	٩١	٧٠٠٠	٦٣٧٠٠٠	٦١٠ × ٤٤٥٩
-٨٠٠٠	٤٤	٩٠٠٠	٣٩٦٠٠٠	٦١٠ × ٣٥٦٤
-١٠٠٠٠	٢٠	١١٠٠٠	٢٢٠٠٠٠	٦١٠ × ٢٤٢٠
-١٢٠٠٠	١٠	١٣٠٠٠	١٣٠٠٠٠	٦١٠ × ١٦٩٠
-١٤٠٠٠	٤	١٥٠٠٠	٦٠٠٠٠	٦١٠ × ٩٠٠
-١٦٠٠٠	٣	١٧٠٠٠	٥١٠٠٠	٦١٠ × ٨٦٧
-١٨٠٠٠	١	١٩٠٠٠	١٩٠٠٠	٦١٠ × ٣٦١
٢٢٠٠٠-٢٠٠٠٠	١	٢١٠٠٠	٢١٠٠٠	٦١٠ × ٤٤١
المجموع	١٢١٦		٤٠٢٤٠٠٠	٦١٠ × ٢٣٠٢٤

$$\dots \text{متوسط قيمة الخسارة } \bar{س} = \frac{\text{مجم (س} \times \text{ك)}}{\text{مجم ك}} = \frac{٤٠٢٤٠٠٠}{١٢١٦} = ٣٣٠٩٢١١ \text{ ج}$$

$$\text{، تباين قيمة الخسارة } \sigma^2 س = \frac{\text{مجم (س}^2 \times \text{ك)} - (\text{مجم (س} \times \text{ك)})^2}{\text{مجم ك} - ١}$$

$$\text{ج } ٧٩٨٩٩٠٧ = \frac{٦١٠ \times ٢٣٠٢٤ - \frac{٢(٤٠٢٤٠٠٠)}{١٢١٦}}{١٢١٥} =$$

وحيث أن عدد الوثائق خلال مدة الخبرة هو ١٨٧٠٨ وبالتعويض بالقيمة السابقة في معادلتى متوسط وتباين مجموع الخسائر نحصل على :

$$\bar{m} = \bar{m} \times \bar{s} \times \bar{n}$$

$$\bar{m} = ٠.٦٤٩٩٨٩٣ \times ٣٣.٩٢١١ \times ١٨٧٠.٨ = ٤٠٢٤٠٠٠ \text{ جنيها}$$

... الانحراف المعياري لمجموع الخسائر

$$= \sqrt{[(\bar{s} \times \sigma^2) + (\bar{s} \times \sigma^2)] \times n}$$

$$= \sqrt{[(٧٩٨٩٩.٧ \times ٠.٦٤٩٩٨٩٣) + (٣٣.٩٢١١ \times ٠.٦٧٠٨٥١١٧)] \times ١٨٧٠.٨}$$

$$= ١٠١٠ \times ٢٣٤٥٩.٧٨١$$

$$= \sqrt{١٥٣١٦٤}$$

... القسط الصافي النهائي =

القسط الصافي الخام أو الأولي + مخصص الانحرافات

$$= ٤٠٢٤٠٠٠ + ١٥٣١٦٤ = ٤١٧٧١٦٤ \text{ جنيها}$$

ويمثل هذا المبلغ مجموع الاقساط الخاصة بمجموع الوثائق كلها وعددها ١٨٧٠.٨

$$\text{... قسط التأمين للوثيقة الواحدة} = \frac{٤١٧٧١٦٤}{١٨٧٠.٨} = ٢٢٣٢٨٢ \text{ جنيها}$$

$$\text{... سعر التأمين الصافي} = \frac{\text{مجموع الخسائر بما فيها مخصص الانحرافات}}{\text{مجموع مبالغ التأمين}}$$

$$= \frac{٤١٧٧١٦٤}{٨٥٦١٧.٢٢١} = ٠.٤٨٧٨٩ \text{ ر.}$$

أو . . . سعر التأمين الصافي = متوسط الخسارة بما فيها مخصص الانحرافات
متوسط مبلغ التأمين

$$٠.٠٤٨٧٨٩ = \frac{٢٢٣٣٨٢}{٤٥٧٦٥} =$$

وحيث أن القسط الوحيد التجارى لمبلغ جنيها واحداً = $\frac{١}{(ب + ج) - ١}$

وبالتعويض عن أ = ٠.٠٤٨٧٨٩

وبالتعويض عن ب = ٢٠.٨٦ %

وبالتعويض عن ج = ٢٥ %

$$٠.٠٤٨٧٨٩ = \frac{٠.٠٤٨٧٨٩}{(٢٠.٢٥ + ٢٠.٨٦) - ١}$$

$$= \frac{٠.٠٤٨٧٨٩}{(٢٠.٢٥ + ٢٠.٨٦) - ١}$$

$$= \frac{٠.٠٤٨٧٨٩}{٢٣٣٦ - ١}$$

$$= \frac{٠.٠٤٨٧٨٩}{٧٦٦٤} = ٠.٠٦٣٦٦ = ٦.٣٦٦ \%$$

ويضرب هذه النسبة فى مبلغ تأمين الوثيقة نحصل على قسط التأمين .

أسئلة على الوحدة الدراسية السادسة عشرة

١- فيما يلي بيان عن توزيع مجموعة من وثائق تأمين السيارات التكميلي خلال فترة الدراسة حسب عدد وقيم الخسائر:

عدد الحوادث	عدد الوثائق	فئة الخسارة	عدد الخسائر
صفر	٢٠٨٤٥	صفر -	١٦٠٥
١	٢٠٥٥	٢٠٠٠ -	٨٥٧
٢	٦٠٠	٤٠٠٠ -	٥٥٥
٣	٨٥	٦٠٠٠ -	٣٢٥
٤	١٥	٨٠٠٠ -	١٥٥
		١٠٠٠٠ -	٥٥
		١٢٠٠٠ -	١٥
		١٤٠٠٠ - ١٦٠٠٠	٣

المطلوب تحديد قسط التأمين التجاري وسعر التأمين التجاري إذا علمت أن نسبة التحويلات ٣٦ر٢٢٪ من القسط التجاري وأن مجموع مبالغ التأمين خلال فترة الخبرة قد بلغ ١٩٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ جنيهاً.

المراجع

أولاً : المراجع العربية

١- الكتب،

- ١- أحمد جاد عبدالرحمن وآخرون ، تأمين الحريق والحوادث العامة ، (الكويت: الهيئة العامة للتعليم التطبيقي والتدريب، ١٩٨٦).
- ٢- حسين محمد السلاموني ، إدارة الخطر والتأمين ، (القاهرة : دار الإتحاد العربى للطباعة ، ١٩٨٨) .
- ٣- سمير كامل عاشور ، الإحصاء التحليلي ، (القاهرة : معهد الدراسات والبحوث الإحصائية ١٩٧٩).
- ٤- سلامة عبدالله سلامة ، الخطر والتأمين: الأصول العلمية والعملية ، (القاهرة : دار النهضة العربية ، ١٩٧٤) .
- ٥- شوقي سيف النصر سيد ، التأمين: الأصول العلمية والمبادئ العملية ، (القاهرة ، دار الفكر العربى ، ١٩٨٤).
- ٦- عادل عبدالحميد عز ، بحوث فى التأمين ، (القاهرة: دار النهضة العربية ، ١٩٦٧).
- ٧- عادل عبدالحميد عز ومحمد صلاح الدين صدقى ، التأمين ورياضياته، (القاهرة : دار النهضة العربية ، ١٩٧٩) .
- ٨- محمد صلاح الدين صدقى و ممدوح حمزة أحمد، الأساليب الكمية (١)، (القاهرة: مركز التعليم المفتوح ، جامعة القاهرة ، ١٩٩٣) .
- ٩- مختار محمود الهانس ، مبادئ التأمين بين الجوانب النظرية والاسس الرياضية ، (الطبعة الثالثة : الإسكندرية ، الدار الجامعية للطباعة . والنشر والتوزيع ، ١٩٨٥) .
- ١٠- ممدوح حمزة احمد ، النظرية الاحصائية واتخاذ القرار فى التأمين والإدارة ، (القاهرة ، دار النهضة العربية ، ١٩٩٢).
- ١١- _____ ، تأمين الحريق والحوادث المتحلفة ، (القاهرة : مركز التعليم المفتوح بجامعة القاهرة ، ١٩٩٣) .

ثانيا : المراجع الاجنبية

(a) Books:

- (1) Beard R.E.et. al. ,*Risk Theory : The Stochastic Basis of Insurance*, (2nd Edition : London , Chapman and Hall , 1978).
- (2) Benjamin B. , *General Insurance* , (London : Heinemann, 1978).
- (3) Bickelhaupt David L., *General Insurance* (8th Edition : Homewood, Illinois , Richard D. Irwin, Inc. , 1974).
- (4) Daniel Wayne W. et. al. , *Business Statistics: Basic Concept and Methodology*, (3rd Edition : Boston, Houghton Mifflin Company, 1983).
- (5) Doherty Neil A. , *Corporate Risk Management : A Financial Exposition*, (New York : Mc Graw - Hill , Inc. , 1985).
- (6) Dychman Thomas R. et. al. , *Fundamental Statistics for Business and Economics*, (New York : Prentic Hall, Inc. , 1977).
- (7) Elmawaziny Ahmed , *A Course in Theory of Statistics , Distribution Theory* , (Part one : cairo University Press , 1979).
- (8) Fraser D. A. S. , *Statistics : An Introduction* , (New York : John Wiley and Sons, Inc. , 1958).

-
- (9) Hossack I. B. et. al . , *Introductory Statistics With Applications. In General Insurance* , (1st Edition : London, Cambridge University Press , 1983).
- (10) L. Johnson . N. and S. Kotz, *Distributions in Statistics : Continuous Distribution* , (New York : Houghton Mifflin Company, 1969) .
- (11) Long D. John and Gregg W. Davis, *Property and Liability Insurance Handbook* , (Homewood , Illinois : Richard D . Irwin, Inc. , 1965).
- (12) Magee H. John and Serbein N. Oscar , *Property and Liability Insurance*, (4th Edition : Homewood, Illinois , Richard D. Irwin , Inc. , 1967).
- (13) Mayerson Allen L., *Introduction to Insurance* , (1st Edition : New York, The macmillan Company, 1962) .
- (14) Mood Alexander M. et. al. , *Introduction to The theory of Statistics*, (3rd Edition : Tokyo , Mc Graw-Hill Inc. , 1974).
- (15) Plain William et. al. , *Systems of Frequency Curves* , (London : Cambridge University Press, 1969).
- (16) Riegel Robert et. al. , *Insurance Principles and Practices Property and Liability* , (5th Edition : New Jersey , Prentic- Hall, Inc., Englewood Liffs , 1976).

-
- (17) Rodda H. William , *Property and Liability Insurance* , (New Jersey : Prentic - Hall , Inc. , Englewood Cliffs , 1966).
- (18) Seal Hilary L. , *Mixed Poisson Processes and Risk Theory*, (France : Institut de Sciences Actuarielles, Universite de Lausanne . 1980).
- (19) Seal Milary L, *Stochastic Theory of Risk Business* , (2nd Edition : New York , John Wiley and Sons, Inc. , 1969).
- (20) Tahy Hamdy A., *Operations Research : An Introduction* , (3rd Edition : New York, Macmillan Publishing Company, Inc. 1982).
- (21) Williams C. Arthur, JR. And Heins Richard M. , *Risk Management And Insurance* (6th Edition: New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1989).
- (22) Woody John C., *Risk Theory*, (U.S.A, : Education and Examination Committee Of Actuaries, Part 5, 1973).
- (23) Woodroffe Michael, *Probability With Applications*, (U.S.A. : Mc Graw-Hill Inc., 1975) .

(B) Periodicals:

- (1) Aiuppa Thomas A., Evaluation of Pearson Curves As Approximation of the Maximum Probable Aggregate loss, *Journal Of Risk And Insurance*, (Vol. 3. 1988).
- (2) Bowman And Shenton, Approximate Percentage Points For Pearson Distributions, *Piometrika*, (Vol. 66, 1979).
- (3) Cummins J. David, A Comparative Analysis of Alternative Maximum Probable Yearly Aggregate loss Estimators, *Journal of Risk And Insurance* , (Vol. 2. 1978) .
- (4) Lau Hon-Shiang, An Effective Approach For Estimating The Aggregate loss of An Insurance Portfolio, *Journal of Risk And Insurance* , (Vol. 3. 1984).

(c) Researchs:

- (1) Kandil Mohamed Barakat, *Credibility Theory And Experience Rating In General Insurance*, (U.K: City University Ph. D. Dissertation, 1983).
- (2) Morgan Ibrahim M., *Credibility Theory Under The Collective Risk Model*, (U.S.A. : University of Wisconsin - Madison , Ph. D. Dissertation, 1983).

رقم الإيداع : $\frac{١٦٥٤٣}{٢٠٠٥}$

I.S.B.N : 977 - 403 – 036 - 2



Bibliotheca Alexandrina



0750027

